Revista MI API – premiul I la etapa județeană a concursului revistelor școlare

Prof. Matyas Mirel
C.T. "Alesandru Papiu Ilarian" Zalău

Revista de matematică şi informatică "MI API", ajunsă iată la numărul 19 (nr. 9 al serie noi ce a debutat odată cu nr.11 din ianuarie-februarie 2012), a câștigat recent un premiu care dovedește încă o dată că avem de a face cu o revistă de calitate.

La ediția din anul școlar 2015-2016 a concursului revistelor școlare, etapa județeană, am participat, conform regulamentului cu două numere anterioare. Este vorba despre numărul 7 (17) – martie 2015 și 8 (18) – decembrie 2015. În urma jurizării, revista noastră a fost distinsă cu **Premiul I**. Este o încununare a eforturilor colegilor, profesori de matematică și informatică, care se încăpățânează an de an să ducă mai departe tradiția unei reviste ce a ajutat, prin articolele ei, generații de elevi.

Este al doilea premiu obținut de revista noastră, după cel din anul 2012, când, am fost distinși cu același premiu I.

Dedicăm acest premiu, tuturor profesorilor de matematică şi informatică dar şi elevilor noştri, care ne-au ajutat cu articole interesante. Credem că și pe viitor putem menține sus ștacheta calității și seriozității.

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

ISJ Sălaj
Inspectoratul Școlar Județean Sălaj

Diplomă

Se acordă PREMIUL I.
elevului / elevei revista „Mi API"
din clasa ..... de la Școala COLEGIUL TEHNIC „ALESANDRU PAPIU ILARIAN" ZALĂU
pentru rezultatele obținute la CONCURSUL DE REVISTE ȘCOLARE
etapa județeană, în anul școlar 2015 / 2016.

Inspector Școlar General,
prof. Maria Pop

Inspector Școlar,
prof. MARCEL LUCAȘIU

Zalău, 2016

Chestiuni metodice

Continuăm şi în acest număr abordarea din punct de vedere metodic a unor teme din programa de matematică, care fac obiectul examenului de Bacalaureat.

Analiză matematică clasa a XI-a
Metode de abordare – Comentarii – Sugestii

Prof. Alexuțan Klára
C.T. "Alesandru Papiu Ilarian" Zalău

Recomandări

- Evidenţierea cerinţelor tip (repetitive) din exemplele propuse
- Rezolvarea exemplelor ca prim pas în pregătirea elevilor
- Utilizarea exemplelor pentru o pregătire diferenţiată care să conducă la promovarea probei de examen
- Utilizarea informaţiilor teoretice pentru fixarea şi contextualizarea noţiunilor de sinteză recapitulate.
- Utilizarea baremelor de evaluare şi notare în cadrul procesului de pregătire atât pentru verificarea rezolvărilor cât şi pentru îmbunătăţirea competenţelor de autoevaluare.

Cerinţe tip

M_tehnologic

1) Să se studieze continuitatea funcţiei f în punctul x_0
2) Să se determine parametrul real a astfel încât funcţia f să fie continuă în punctul x_0
3) Să se calculeze limita
4) Să se determine ecuaţia asimptotei
5) Să se calculeze $f'(x)$
6) Să se calculeze $f'(x_0)$
7) Să se calculeze limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_0}$
8) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul $A(x_0, f(x_0))$
9) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f
10) Să se determine punctele de extrem ale funcţiei f
11) Să se arate că are loc inegalitatea

12) Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcţiei f
13) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f'
14) Să se determine punctele de inflexiune ale funcţiei

M_mate-info

1) Să se arate că şirul este monoton
2) Să se arate că şirul este mărginit
3) Să se arate că şirul este convergent
4) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcţiei f.
5) Să se arate că funcţia f este injectivă
6) Să se arate că funcţia f este surjectivă
7) Să se arate că funcţia f este bijectivă
8) Să se arate că funcţia f este inversabilă
9) Să se determine mulţimea valorilor funcţiei f
10) Diverse ecuaţii
11) Diverse inegalităţi

Exemple

1. Se consideră funcţia $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

a) Să se determine ecuaţia asimptotei oblice către ∞ la graficul funcţiei f.
b) Să se verifice dacă $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}, \forall x > 0$.
c) Să se arate că f este convexă pe $(0, \infty)$.
d) Să se determine ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei f.
e) Să se calculeze $f'(2)$.
f) Să se calculeze limita $\lim\limits_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$.
g) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul $A(1, f(1))$.
h) Să se determine intervalele de monotonie.
i) Să se determine numărul punctelor de extrem.
j) Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2013}\right) < f\left(\sqrt[3]{2014}\right)$.
k) Să se determine mulţimea valorilor funcţiei f.
l) Să se determine numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei

$f(x) = m, m \in \mathbb{R}$.

Rezolvare:

a) Ecuaţia asimptotei oblice este de forma $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ este $y=x$.

b) $f'(x) = \frac{2x\cdot x-(x^2+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}, \forall x > 0.$

c) $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0, \forall x > 0 \Longrightarrow f$ convexă pe $(0, \infty)$.

d) $f(0+0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \infty \Longrightarrow x = 0$ asimptotă verticală la stânga.

e) $f'(2) = \frac{3}{4}$.

f) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3) = \frac{8}{9}$.

g) Ecuaţia tangentei este: $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Longrightarrow y - 2 = 0$.

h) $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$; -1 nu convine

x	0		1		∞
$f'(x)$	----------0++++++++++++++++++				
$f(x)$	∞	$\searrow$	2	$\nearrow$	∞

Pe $(0, 1)$ f este strict descrescătoare, iar pe $(1, \infty)$ f este strict crescătoare.

i) Un punct de extrem, x=1 punct de minim

j) $\left.\begin{array}{l} \sqrt[3]{2013} < \sqrt[3]{2014} \\ \sqrt[3]{2013}, \sqrt[3]{2014} \in (1,\infty) \\ pe\ (1,\infty) fs. crescătoare \end{array}\right\} \Longrightarrow f\left(\sqrt[3]{2013}\right) < f\left(\sqrt[3]{2014}\right).$

k) $Imf = (2, \infty)$

l) $m \in (-\infty, 2) \Longrightarrow ec. nu\ are\ soluţii\ reale$

$m \in (2, \infty) \Longrightarrow ec. are\ două\ soluţii\ reale\ x_1 \in (0,1), x_2 \in (1, \infty)$.

$m = 2 \Longrightarrow$ ecuaţia are soluţia x=1.

2. Se consideră funcţia $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} - lnx$.

a) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = 0$.

b) Demonstraţi că f este crescătoare pe intervalul $(4, +\infty)$.

c) Determinaţi ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei f.

(Bacalaureat 2012 M_tehnologic iunie-iulie)

Rezolvare:

a) $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' - (lnx)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}, x \in (0, \infty)$

$\lim\limits_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = f'(4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$

b) $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' - (lnx)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-2}{2x}$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \sqrt{x} - 2 = 0 \Longrightarrow x = 4$$

x	0	4		∞
$f'(x)$	----------0		++++++++++++++++++	
$f(x)$	↘	f(4)	↗	

$\Longrightarrow f$ este crescătoare pe $(4, +\infty)$.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\sqrt{x} - lnx\right) = \infty \Longrightarrow x = 0$ este ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei *f*.

3. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-x-1}{x+1}$.

a) Calculaţi $f'(x), x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)\cdot lnx}{x^2-x-1}$.

c) Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei *f*.

(Bacalaureat 2012 M_tehnologic august)

Rezolvare:

a) $f'(x) = \frac{(2x-1)(x+1)-\left(x^2-x-1\right)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)\cdot lnx}{x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{lnx}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$(l'Hospital)

c) Ecuaţia asimptotei oblice este de forma $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x} = 1.$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-2x-1}{x+1}\right) = -2$$

Ecuaţia asimptotei oblice spre spre $+\infty$ este *y=x-2*.

4. Se consideră funcţia $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} - 1$.

a) Arătaţi că $2\sqrt{x}f'(x) = 1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

b) Verificaţi dacă dreapta de ecuaţie $y = \frac{1}{4}x$ este tangentă la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 4$, situat pe graficul funcţiei *f*.

c) Arătaţi că funcţia f este concavă pe intervalul $(0, +\infty)$.

(Bacalaureat 2013 M_tehnologic iunie-iulie)

Rezolvare:

a) $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' - 1' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x \in (0, \infty)$

$2\sqrt{x}f'(x) = 2\sqrt{x}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 1, x \in (0, \infty)$

b) $y - f(4) = f'(4)(x - 4);\ f(4) = 1, f'(4) = \frac{1}{4}$

Ecuaţia tangentei este $y = \frac{1}{4}x$.

c) $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0, \forall x \in (0, \infty) \Longrightarrow$ f concavă pe $(0, \infty)$

5. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x + 2)^3$.

a) Verificaţi dacă $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătaţi că funcţia f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{x^2}$. (Bacalaureat 2013 M_tehnologic august)

Rezolvare:

a) $f'(x) = (x^3 + 6x^2 + 12x + 8)' = 3x^2 + 12x + 12, x \in \mathbb{R}$.

b) $f'(x) = 3(x + 2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+12x+12}{x^2} = 3$.

6. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 12x$.

a) Arătaţi că funcţia este crescătoare pe intervalul $[2, +\infty)$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{f(x)}$

c) Determinaţi mulţimea numerelor reale *a* pentru care ecuaţia *f(x)=a* are trei soluţii reale distincte. (Bacalaureat 2012 M_mate-info iulie)

Rezolvare:

a) $f'(x) = 3x^2 - 12, x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$.

Obţinem tabelul de variaţie:

x	-∞		-2		2		+∞
$f'(x)$		+++++++++++	0	----------	0	+++++++++++	
f(x)	-∞	↗	16	↘	−16	↗	+∞

Din tabel rezultă că f este strict crescătoare pe $[2,\infty)$.

b) Aplicăm de trei ori regula lui l'Hospital şi obţinem:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{3x^2-12}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{6x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{6}=\infty.$$

c) Şirul lui Rolle pentru funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-a$ este $-\infty, 16-a, -16-a, \infty$

Ecuaţia are trei soluţii reale distincte dacă şi numai dacă a$\in(-16,16)$.

7. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty), f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}$.

b) Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei *f*.

c) Demonstraţi că, pentru.orice număr real *m>0*, ecuaţia *f(x)=m* are soluţie unică în $\mathbb{R}$.

(Bacalaureat 2012 M_mate-info august)

Rezolvare:

a) $f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$$

b) Ecuaţia asimptotei oblice este de forma $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}=2.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}}=0$$

Ecuaţia asimptotei oblice spre spre $+\infty$ este *y=2x*.

c) *f* este continuă pe $\mathbb{R}$ şi

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+1})=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-1}{x-\sqrt{x^2+1}}=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty\Rightarrow Imf=(0,\infty)\Longrightarrow$$

f este surjectivă. (1)

Din a) $\Longrightarrow f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}>0,\ \forall\, x\in\mathbb{R}\Longrightarrow$ f este strict monotonă pe $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$f este injectivă. (2)

Din (1) şi (2) $\Longrightarrow$ f este bijectivă $\Longrightarrow$ ecuaţia *f(x)=m* are soluţie unică în $\mathbb{R}, \forall m>0$.

8. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = cosx + \frac{x^2}{2}$.

a) Calculaţi $f'(x), x \in \mathbb{R}$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei *f* în punctul de abscisă $x_0 = 0$, situat pe graficul funcţiei *f*.

c) Demonstraţi că $f(x) \geq 1$, pentru orice , $x \in \mathbb{R}$.

(Bacalaureat 2013 M_mate-info iunie-iulie)

Rezolvare:

a) $f'(x) = \left(cosx + \frac{x^2}{2}\right)' = -sinx + x, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$$f(0) = 1, f'(0) = 0 \Longrightarrow$$

Ecuaţia tangentei este $y = 1$.

c) $f''(x) = -cosx + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f'$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$

$f'(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty, 0]$ şi $f'(x) \geq 0, \forall x \in [0, \infty) \Longrightarrow 0$ punct de minim

$$f(x) \geq f(0) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

9. Se consideră funcţia $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x+e^x}$.

a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(x+e^x)^2}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

b) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei *f*.

c) Demonstraţi că $f(x) \geq \frac{e}{e+1}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

(Bacalaureat 2013 M_mate-info august)

Rezolvare:

a) $f'(x) = \frac{e^x(x+e^x) - e^x(1+e^x)}{(x+e^x)^2} = \frac{(x-1)e^x}{(x+e^x)^2}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x+e^x} =$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$(regula lui l'Hospital) $\Longrightarrow$ecuaţia asimptotei orizontale spre ∞ la graficul funcţiei *f* este *y*=1.

c) $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 1$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	----------	0	++++++++++++++++++
f(x)	↘	f(1)	↗

$f(x) \geq f(1) = \frac{e}{e+1}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

10. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x+2}, & x \geq 0 \\ x + \frac{3}{2}, & x < 0 \end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcţiei f în punctual $x_0 = 0$.
b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcţiei *f*.
c) Să se arate că $f(x) \in \left[\frac{3}{2}, 2\right)$, oricare ar fi $x \in [0, \infty)$.

11. Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $x_1 \in (0,1)$ şi $x_{n+1} = \frac{{x_n}^5+3x_n}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $x_n \in (0,1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
b) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.
c) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+2}}{x_n} = \frac{9}{16}$.

12. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{|x^2 - x|}$.

a) Să se arate că graficul funcţiei *f* admite o asimptotă spre $-\infty$.
b) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcţiei *f*.
c) Să se determine punctele de extreme local ale funcţiei *f*.

Bibliografie:

1. Szilard, Andras, Bălună, Mihai - *Bacalaureat 2012: M2 matematică: ghid de pregătire pentru examen*, Editura GIL, Zalău, 2011
2. Bălună, Mihai, Panaitopol, Maria Elena – *Bacalaureat 2012: M2 matematică: ghid de pregătire pentru examen*, Editura GIL, Zalău, 2011
3. ***, Manuale de matematică, clasele IX-XII.
4. Catană A., Săcuiu M., Stănăşilă O. – *Metodica predării analizei matematice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

Examene. Concursuri

1. Examenul de Bacalaureat sesiunea iunie – iulie 2016

A. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

Prof. Manuela Sabou
C.T. "Alesandru Papiu Ilarian" Zalău

Subiectul I (30 puncte)

1. Arătați că $\left(\sqrt{2}-3\right)^2+\left(\sqrt{2}+3\right)^2=22$.
2. Calculați produsul $f(-1)f(0)f(1)$, unde $f: R \to R, f(x)=2x+2$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $log_3(x^2-6x+6)=log_3 1$.
4. Determinați cîte numere naturale pare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifrele 5, 7, 8 și 9.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(-1,0) și B(1,2). Determinați ecuația dreptei *d* care trece prin punctul O și este paralela cu dreapta AB.
6. Arătați că $\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=0$, pentru orice număr real x.

Subiectul al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2+x\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $det\big(A(1)\big)=1$.

b) Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x $şi$ y.

c) Determinați numărul real $a, a\neq 1$, știind că $A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot \ldots \cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+mX^2+2$, unde m este număr real.

a) Determinați numărul real m , știind că $f(1)=0$.

b) Demonstrați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)=0$, pentru orice numar real m, unde x_1, x_2, x_3 si x_4 sunt rădăcinile polinomului f.

c) Pentru $m = 3$,descompuneți polinomul f în factori ireductibili în $R[X]$.

Subiectul al III-lea (30 puncte)

1. Se consideră funcția $f: R \to R, f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$,$x \in R$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situate pe graficul funcției f.

c) Demonstrați că, pentru orice număr real $a, a \in (-1,1)$, ecuația $f(x) = a$ are soluție unică.

2. Se consideră funcția $f: R \to R, f(x) = e^x(x-1)$.

a) Arătați că $\int_0^2 f(x)e^{-x}dx = 0$.

b) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$ are aria egală cu e.

c) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-n}^{1}(f(x) + e^{x})dx = 0$.

Rezolvare:

Subiectul I

1. $\left(\sqrt{2}-3\right)^2 = 11 - 6\sqrt{2}$. $\left(\sqrt{2}+3\right)^2 = 11 + 6\sqrt{2} =>$ $\left(\sqrt{2}-3\right)^2 + \left(\sqrt{2}+3\right)^2 = 11 - 6\sqrt{2} + 11 + 6\sqrt{2} = 22$.

2. $f(-1) = 0. f(-1)f(0)f(1) = 0$.

3. $x^2 - 6x + 6 = 1 => x^2 - 6x + 5 = 0. x = 1\ sau\ x = 5$, care verifică ecuația dată.

4. Cifra unităților este 8. Cum cifrele sunt distincte, cifra zecilor poate fi aleasă în 3 moduri și, pentru fiecare alegere a acesteia, cifra sutelor poate fi aleasă în câte 2 moduri, deci se pot forma $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ astfel de numere.

5. $m_{AB} = 1\ si\ m_d = m_{AB} => m_d = 1$. Ecuația dreptei d este $y = x$.

6. $\sin\left(\frac{3\pi}{x} - x\right) = \sin\left(3\pi - \frac{3\pi}{x} - x\right) = \sin\left(3\pi - (\frac{3\pi}{x} + x)\right) = \sin\left(\pi - (\frac{3\pi}{x} + x)\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{x} + x\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{x} + x\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{x} - x\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{x} + x\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{x} + x\right) = 0$, pentru orice număr real.

Subiectul al II-lea

1. **a)** $A(x)=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix} => \det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0=1.$

b) $A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1&x&x^2+x\\0&1&2x\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&y&y^2+y\\0&1&2y\\0&0&1\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}1&y+x&y^2+y+2xy+x^2+x\\0&1&2y+2x\\0&0&1\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}1&x+y&(x+y)^2+(x+y)^1\\0&1&2(x+y)\\0&0&1\end{pmatrix}=A(x+y)$, pentru orice numere reale x *şi* y.

c) $A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right) <=> a=2016.$

2. **a)** $f(1)=0 <=> 1^4+m1^2+2=0.\ m=3.$

b) $x_1+x_2+x_3+x_4=0.\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2=0$, pentru orice număr real m.

c) $f=X^4+3X^2+2=(X^2+1)(X^2+2)$. Polinoamele X^2+1 și X^2+2 au coeficienți reali, au gradul 2 și nu au rădăcini reale ireductibile în $R[X]$.

Subiectul al III-lea

1. a) $f'(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}-\frac{x\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, x\in R.$

b) $f(0)=0, f'(0)=1$, ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=x$.

c) $f'(x)>0$ pentru orice $x\in R$, deci f este strict crescătoare pe R. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1,\quad \lim\limits_{n\to\infty}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$ și funcția f este continuă, atunci pentru orice $a\in(-1,1)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică.

2. **a)** $\int_0^2 f(x)e^{-x}\,dx=\int_0^2 e^x(x-1)e^{-x}dx=\int_0^2(x-1)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_0^2=\frac{4}{2}-2=0.$

b) $A = \int_1^2 |f(x)|\, dx = \int_1^2 (x-1)e^x dx = (x-2)e^x|_1^2 = 0 - (-1)e = e.$

c) $\int_{-n}^1 (f(x) + e^x)dx = \int_{-n}^1 xe^x\, dx = (x-1)e^x|_{-n}^1 = (n+1)e^{-n} \cdot \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^1 (f(x) + e^x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{e^n} = 0.$

B. Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale, profilul resurse, toate calificările profesionale, profilul tehnic, toate calificările profesionale

Prof. Asztaloș Lia
C.T. "Alesandru Papiu Ilarian" Zalău

Subiectul I (30 puncte)

1. Arătaţi că $(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) \cdot \frac{10}{3} = 1.$

2. Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul A(1,0) aparţine graficului funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - a$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+1} = 5.$

4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea M={10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90}, acesta să fie multiplu de 30.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,5) şi B(7,5). Determinaţi coordonatele mijlocului mijlocului segmentului AB.

6. Dacă $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ şi $\cos x = \frac{5}{13}$, arataţi că $tg\, x = \frac{12}{5}$.

Subiectul al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră matricele A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ şi B= $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că det A= 1.

b) Arătaţi că $B \cdot B + A = O_2$, unde O_2= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Determinaţi numerele reale x şi y, pentru care $A + B = \begin{pmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 4^y \end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 2X + 1$.

a) Arătaţi că $f(1) = -2$.

b)Determinaţi cîtul şi restul polinomului f la polinomul X+1.

c) Demonstraţi că $(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2) = -3$ unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul al III-lea (30 puncte)

1.Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 + 3x + 2$.

a) Arătaţi că $f'(x) = 3(1-x)(1+x), x \in \mathbb{R}$.

b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)}{x-2} = -9$.

c) Demonstraţi că $f(x) \le 4$, pentru orice $x \in [-1, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$.

a) Arătaţi că $\int_{-1}^{1} (f(x) - 2)dx = 0$.

b) Arătaţi că $\int_0^1 e^x f(x)dx = 2e - 1$.

c)Determinaţi numărul real a , ştiind că $\int_0^a f(x)dx = \int_0^{6-a} (f(x) - 4)dx$.

Rezolvare:

Subiectul I **(30 de puncte)**

1.a) det A=$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$=0+1=1	5 p
b) $B \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B \cdot B + A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} +$ $+ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$	3p 2p
c) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 4^y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 4^y = 1 \end{cases}$ deci $x = 0$, $y = 0$.	2p 3p
2. a) $prin\ calcul$ $f(1) = -2$	5p
b) Câtul este $X^2 - 3X + 1$ Restul este 0	2p 3p
c) $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2) =$ $(2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3) = f(2) = -3$	2p 3p

Subiectul al II-lea **(30 de puncte)**

1.a) $f'(x) = -3x^2 + 3 = 3(1 - x^2) =$ $= 3(1-x)(1+x), x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = -9$	5p
c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 1$ $x \in [-1,1] \Rightarrow f'(x) \ge 0$,deci f este crescatoare pe intervalul $[-1,1]$ $x \in [-1, +\infty) \Rightarrow f'(x) \le 0$,deci f este descrescatoare pe intervalul $[1, +\infty)$ Cum $f(1) = 4$, obţinem $f(x) \le 4$ pentru orice $x \in [-1, +\infty)$	2p 1p 1p 1p

2. a) $\int_{-1}^{1}(f(x)-2)dx = \int_{-1}^{1}(x+2-2)dx = \frac{x^2}{2}\Big\|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$	5p
b) $\int_0^1 e^x f(x)dx = \int_0^1 e^x(x+2)dx = e^x(x+2)\|_0^1 - e^x\|_0^1 = 2e-1$	3p 2p
c) $\int_0^a f(x)dx = \frac{a^2}{2}+2a$ $\int_1^{6-a}(f(x)-4)dx = \frac{(6-a)^2}{2}-2(6-a)$ $\frac{a^2}{2}+2a = \frac{(6-a)^2}{2}-2(6-a)$ $\Leftrightarrow a=1.$	2p 2p 1p

Subiectul al III - lea **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$, $\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{3}=1.$	5p
2.	$f(1)=0 \Rightarrow 1-a=0 \Rightarrow a=1$	5p
3.	$x+1=25 \Rightarrow x=24$, care verifică relația.	5p
4.	Mulțimea A are 9 elemente , deci sunt 9 cazuri posibile. Multiplii de 30 din mulțimea M sunt 30,60 şi 90, deci sunt trei cazuri favorabile. $P=\frac{\text{nr.cazuri favorabile}}{\text{nr.cazuri posibile}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	1p 2p 2p
5.	x_M=5, M este mijlocul segmentului AB şi y_M=5	5p
6.	$sin^2x = 1-cos^2x = 1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$ şi, cum $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, obținem $\sin x=\frac{12}{13}$ şi $\operatorname{tg} x=\frac{12}{5}$.	3p 2p

2. Examenul de Bacalaureat sesiunea august 2016

A. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

Prof. Sîrb Vasile
C.T. "Alesandru Papiu Ilarian" Zalău

Subiectul I (30 puncte)

1. Determinaţi al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1 = 2016$ şi raţia $r = 2$.

2. Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(1,2)$ aparţine graficului funcţiei $f: R \to R$, $f(x) = x + m$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{4x-6} = 4^{3x-4}$.

4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 40\}$, acesta să conţină cifra 4.

5. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A(1,2)$ şi $B(4,5)$. Determinaţi ecuaţia dreptei *AB*.

6. Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, şi $\sin x = \frac{4}{5}$, arătaţi că $\sin 2x = \frac{24}{25}$.

Subiectul al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + y - z = -1 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătaţi că $\det(A(0)) = -2$.

b) Demonstraţi că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real *a*, $a \neq -1$ şi $a \neq 1$.

c) Determinaţi numerele întregi a, pentru care sistemul are soluţie unică (x_0, y_0, z_0) , iar x_0, y_0, z_0 sunt numere întregi.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x * y = 3xy + 3x + 3y + 2$.

a)Arătaţi că $x * y = 3(x + 1)(y + 1) - 1$, pentru orice numere reale x şi y.

b) Se consideră funcţia $f: R \to R$, $f(x) = 3x + 3$. Demonstraţi că $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice numere reale x şi y.

c) Determinaţi numerele reale *a*, pentru care $\underbrace{a * a * a * \dots * a}_{de\ 2016\ ori\ a} = 3^{2015} - 1$.

Subiectul al III-lea (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(1,\infty)\to R$, $f(x)=ln\frac{x+1}{x-1}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$, $x\in(1,\infty)$.

b) Demonstraţi că f este convexă pe $(1,\infty)$.

c) Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty}(f'(2)+f'(3)+\cdots+f'(n))=-\frac{3}{2}$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to R$, $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

a) Arătaţi că $\int_1^2\sqrt{x}f(x)dx=\frac{5}{2}$.

b) Arătaţi că $\int_1^{e^2}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)lnxdx=4$.

c) Determinaţi numărul real a, $a>1$, ştiind că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei *Ox* a graficului funcţiei $g:[1,a]\to R$, $g(x)=f(x)$ este egal cu $\pi(lna+\frac{7}{2})$.

Rezolvare:

Subiectul I

1) $a_3=a_1+2r=2016+2\cdot 2=2020$

2) $A(1,2)\in G_f\Rightarrow f(1)=2\Longrightarrow 1+m=2\Rightarrow m=1$

3) $2^{4x-6}=4^{3x-4}\Rightarrow 2^{4x-6}=2^{2(3X-4)}\Rightarrow 4X-6=6X-8\ \Rightarrow 2X=2\ \Rightarrow X=1$.

4) $A=\{1,2,3,\dots,40\}\Rightarrow$ 40 cazuri posibile.

Numerele care conţin cifra 4 sunt: 4, 14, 24, 34, 40, rezultă 5 cazuri favorabile.

$$P=\frac{nr.cazuri\ favorabile}{nr.cazuri\ posibile}=\frac{5}{40}=\frac{1}{8}.$$

5) $(AB):\frac{Y-Y_B}{Y_A-Y_B}=\frac{X-X_B}{X_A-X_B}\Rightarrow\frac{y-5}{2-5}=\frac{x-4}{1-4}$ de unde ecuaţia dreptei este $x-y+1=0$.

6) $sin^2x+cos^2x=1$, avem $cos^2x=1-sin^2x=\frac{9}{25}$; $cosx=\pm\frac{3}{5}$, dar deoarece $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, luăm $cosx=\frac{3}{5}$.

Atunci $\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$.

Subiectul al II-lea

1) a) $\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\1&1&-2\end{vmatrix}=-2+0+0-1-(-1)-0=-2.$

b) $\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(a-1)(a+1)$

A este inversabilă dacă $\det(A(a)) \neq 0$, deci $a \neq -1$ şi $a \neq 1$.

c) Sistemul are soluţie unică, deci $a \neq -1$ şi $a \neq 1$. Soluţia este dată de formulele lui Cramer: $x = \frac{-1}{a-1}$, $y = \frac{1}{a-1}$, $z = 0$.

Cum a este număr întreg, $\frac{1}{a-1} \in Z \Rightarrow a - 1 \in D_1 = \{\pm 1\}$. Deci $a - 1 = 1$ de unde $a = 2$, iar din $a - 1 = -1$, avem $a = 0$.

2) a) $x * y = 3xy + 3x + 3y + 2 = 3xy + 3x + 3y + 3 - 1 =$
$3x(y+1) + 3(y+1) - 1 = 3(x+1)(y+1) - 1$

b) $f(x * y) = 3 \cdot (x * y) + 3 = 3(3(x+1)(y+1) - 1) + 3 =$
$9(x+1)(y+1) = (3x+3)(3y+3) = f(x) \cdot f(y)$

c) Din $\underbrace{a * a * a * \ldots * a}_{de\ 2016\ ori\ a} = 3^{2015} - 1$ şi punctul b) avem

$f(\underbrace{(a * a * a * \ldots * a)}_{de\ 2016\ ori\ a}) = f(3^{2015} - 1) \Leftrightarrow$

$\underbrace{f(a) \cdot f(a) \cdot \ldots \cdot f(a)}_{de\ 2016\ ori} = 3(3^{2015} - 1) + 3 \Leftrightarrow (f(a))^{2016} = 3^{2016}$, de unde $f(a) = 3\ sau\ f(a) = -3$. Obţinem soluţia $a \in \{-2, 0\}$.

Subiectul al III-lea

1) a) $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1) \Rightarrow$
$f'(x) = (\ln(x+1))' - (\ln(x-1))' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$.

b) $f''(x) = \frac{4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$. Pentru orice $x \in (1, \infty)$ $f''(x) > 0$, deci f este convexă pe $(1, \infty)$.

c) folosind derivata de la punctul a) avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(f'(2) + f'(3) + \cdots + f'(n)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{3}{2}$$

2) a) $\int_1^2 \sqrt{x} f(x)dx = \int_1^2 \sqrt{x}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^2 (x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_1^2 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

b) $\int_1^{e^2}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)lnxdx=\int_1^{e^2}\frac{1}{\sqrt{x}}lnxdx=\int_1^{e^2}2\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot lnxdx=$
$\int_1^{e^2}2\cdot\left(\sqrt{x}\right)'lnxdx=2\sqrt{x}lnx\Big|_1^2-2\cdot\int_1^{e^2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=$
$2\sqrt{x}lnx\Big|_1^2-4\sqrt{x}\,\Big|_1^2=4e-4e+4=4.$

c) $V=\pi\cdot\int_1^a g^2(x)dx=\pi\cdot\int_1^a\left(x+2+\frac{1}{x}\right)dx=\pi\cdot(\frac{x^2}{2}+2x+$
$lnx)\Big|_1^a=\pi\cdot(\frac{a^2}{2}+2a+lna-\frac{5}{2}).$

Atunci avem: $\pi\cdot\left(\frac{a^2}{2}+2a+lna-\frac{5}{2}\right)=\pi(lna+\frac{7}{2})\Leftrightarrow a^2+4a-12=0$ și cum $a>1$, obținem $a=2$.

B. Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale, profilul resurse, toate calificările profesionale, profilul tehnic, toate calificările profesionale

Prof. Matyas Mirel
C.T. "Alesandru Papiu Ilarian" Zalău

Subiectul I (30 puncte)

5p 1. Arătați că $1-\frac{1}{2}:0{,}5=0$

5p 2. Arătați că $2(x_1+x_2)-x_1x_2=1$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-8x+15=0$

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{5x+1}=6$

5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, acesta să fie divizibil cu 2.

5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6{,}0)$ și B(0,8). Calculați lungimea segmentului *AB*.

5p 6. Calculaţi lungimea laturii *AB* a triunghiului *ABC*, dreptunghic în *A*, ştiind că $BC=3\sqrt{2}$ și $m(\sphericalangle B)=45°$

Subiectul al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p a) Arătați că $detA=1$.

5p b) Arătați că $A\cdot A+I_2=2A$.

5p c) Determinați numerele reale a, b și c pentru care $A\cdot\begin{pmatrix}a-2 & b\\ c+1 & 1\end{pmatrix}=I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$.
5p a) Arătați că $1 \circ (-3) = -3$.
5p b) Demonstrați că $x \circ y = (x+3)(y+3) - 3$, pentru orice numere reale x și y.
5p c) Determinați valorile reale ale lui x, pentru care $x \circ x \leq x$.

Subiectul al III-lea (30 puncte)
1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$.
5p a) Arătați că $f'(x) = 6x(x-1), x \in \mathbb{R}$.
5p b) Arătați că $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-11}{x-2} = 12$.
5 p c) Demonstrați că $f(x) \geq 6$, pentru orice $x \in [0, \infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x$.
5p a) Arătați că $\int_{-1}^{1} (f(x) - 3x)dx = \frac{2}{3}$.
5p b) Arătați că $\int_{0}^{1} (f(x) - x^2)e^x dx = 3$.
5p c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcție $g: [1,2] \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{3f(x)}{x}$.

Rezolvare:

Subiectul I
1. $1 - \frac{1}{2} : 0{,}5 = 1 - \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1 - 1 = 0$.
2. Folosind relațiile lui Viete avem $x_1 + x_2 = 8, x_1 x_2 = 15$. Atunci $2(x_1 + x_2) - x_1 x_2 = 2 \cdot 8 - 15 = 1$.
3. $\sqrt{5x+1} = 6 \iff 5x + 1 = 36 \Rightarrow x = 7$ care verifică ecuația.
4. Mulțimea *A* are 8 elemente, deci numărul cazurilor posibile este 8. Numerele divizibile cu 2 din mulțimea *A* sunt 2,4,6 și 8 deci avem 4 cazuri favorabile. $p = \frac{nr.cazuri\ favorabile}{nr.cazuri\ posibile} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
5. Avem $AB = \sqrt{(0-6)^2 + (8-0)^2} = 10$.
6. Triunghiul *ABC* fiind dreptunghic în *A*, rezultă $cosB = \frac{AB}{BC} \Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{3\sqrt{2}}$ și de aici $AB = 3$.

Subiectul al II-lea
1. a) $detA = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-2) = 1 - 1 = 0$

b) Avem $A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot A + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 2A.$

c) $A \cdot \begin{pmatrix} a-2 & b \\ c+1 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-2 & b \\ c+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi de aici $\begin{pmatrix} a-2 & b \\ -2a+c+5 & -2b+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Obținem astfel sistemul de ecuații $\begin{cases} a-2=1 \\ b=0 \\ -2a+c+5=0 \\ -2b+1=1 \end{cases}$ cu soluțiile $a=3, b=0, c=1$

2. a) $1 \circ (-3) = 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + 6 = -3 + 3 - 9 + 6 = -3.$

b) Avem $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6 = xy + 3x + 3y + 9 - 3 = x(y+3) + 3(y+3) - 3 = (x+3)(y+3) - 3$ pentru orice numere reale x și y.

c) inecuația $x \circ x \leq x$ este echivalentă cu $(x+3)(x+3) - 3 \leq x \Leftrightarrow (x+3)(x+2) \leq 0$. Rezolvând inecuația de gradul al II-lea obținem $x \in [-3, -2]$.

Subiectul al III-lea

1.a) $f'(x) = (2x^3 - 3x^2 + 7)' = (2x^3)' - (3x^2)' + 7' = 6x^2 - 6x = 6x(x-1), x \in \mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-11}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = 6 \cdot 2 \cdot 1 = 12$

c) Ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile $x = 0$ și $x = 1$. Pentru $x \in [0,1] \Rightarrow f'(x) \leq 0$ deci f este descrescătoare pe $[0,1]$. Dacă $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f'(x) \geq 0$ deci f este crescătoare pe $[1, +\infty)$. Cum $f(1) = 6$ obținem $f(x) \geq 6$ pentru orice $x \in [0, +\infty)$.

2. a) $\int_{-1}^{1} (f(x) - 3x)dx = \int_{-1}^{1} (x^2 + 3x - 3x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

b) Avem $I = \int_0^1 (f(x) - x^2)e^x dx = \int_0^1 (x^2 + 3x - x^2)e^x dx = 3\int_0^1 xe^x dx$ și prin integrare prin părți obținem $I = 3\left(xe^x|_0^1 - \int_0^1 e^x dx\right) = 3(x-1)e^x|_0^1 = 3.$

c) Avem $g(x) = \frac{3f(x)}{x} = \frac{3(x^2+3x)}{x} = 3(x+3)$. Volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $g(x)$ în jurul axei Ox este $V = \pi \int_1^2 g^2(x)dx = \pi \int_1^2 9(x+3)^2 dx = 9\pi \cdot \frac{(x+3)^2}{3}\Big|_1^2 = 183\pi.$

3. Examenul de Bacalaureat sesiunea iunie – iulie 2016, Informatică, limbajul Pascal

Filiera teoretică, profilul real, specializările: matematică-informatică, matematică-informatică intensiv informatică.

student Brusturean Gabriel
Universitatea Tehnică Cluj-Napoca

Subiectul I (30 puncte)

Pentru itemul 1, scrieţi pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Variabila x este de tip întreg. Indicaţi o expresie Pascal care are valoarea true dacă şi numai dacă valoarea variabilei x are exact trei cifre. (4p)

a. (x mod 1000=0) or (x mod 100<>0)
b. (x div 1000=0) or (x div 100<>0)
c. (x mod 1000=0) and (x mod 100<>0)
d. (x div 1000=0) and (x div 100<>0)

2. Se consideră algoritmul alăturat, reprezentat în pseudocod. S-a notat cu a%b restul împărţirii numărului natural a la numărul natural nenul b.

a) Scrieţi valorile afişate în urma executării algoritmului dacă se citesc, în această ordine, numerele 11, 30 şi 7. (6p.)

b) Scrieţi un set de valori care pot fi citite pentru variabilele m, n şi x, astfel încât, în urma executării algoritmului, să se afişeze două numere egale. (4p)

c) Scrieţi în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat, înlocuind structura *cât timp...execută* cu o structură repetitivă de alt tip. (6p.)

d)Scrieţi programul Pascal corespunzător algoritmului dat. (10p.)

```
citeşte m,n,x
(numere natural nenule, m<n)
p←0
┌cât timp m<n şi p=0 execută
│┌dacă m%x=0 şi n%x=0 atunci
│ p←x
│altfel
│┌dacă m%x=0 atunci n←n-1
│ altfel m←m+1
│└■
└■
■
scrie m,' ',n
```

Subiectul al II-lea (30 puncte)

Pentru fiecare dintre itemii 1 şi 2 scrieţi pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. În declararea alăturată, variabila *m* memorează anul fabricaţiei şi marca unei maşini. Indicaţi o expresie Pascal care are valoarea true dacă şi numai dacă maşina a fost fabricată înainte de anul 1950. (4p.)

```
type masina=record
      an_fabricatie:integer;
      marca:string[20];
            end;
var m : masina;
```

a. m.an_fabricatie<1950 b. m.masina.an_fabricatie.m<1950
c. m(an_fabricatie)<1950 d. masina(an_fabricatie)<1950

2. Matricea de adiacenţă a unui graf neorientat cu 5 noduri are 6 elemente nenule. Numărul minim de componente conexe ale grafului este: (4p.)

a. 1 b. 2 c. 3 d. 5

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare dintre cerinţele următoare.

3. Un arbore cu 8 noduri, numerotate de la 1 la 8, are drept rădăcină nodul numerotat cu 7 şi muchiile [1,7], [2,5], [3,5], [3,6], [4,7], [5,7], [5,8]. Enumeraţi nodurile care sunt descendenţi direcţi („fii”) ai nodului 5. (6p.)

4. În secvenţa de instrucțiuni de mai jos variabilele s1 și s2 memorează câte un şir cu cel mult 20 de caractere. Scrieţi ce se afişează pe ecran în urma executării secvenţei.

```
s1:='informatica';
write(length(s1));
s2:='mate';
s2:=s2+copy(s1,pos('ma',s1),10);
write(s2); (6p.)
```

5. Scrieţi un program Pascal care citeşte de la tastatură un număr natural, n (n∈[2,102]), şi construieşte în memorie un tablou bidimensional, cu n linii şi n coloane, astfel:

- prima coloană conţine, în ordine strict crescătoare, numerele naturale din intervalul [1,n];
- toate elementele ultimei linii au valoarea n;
- oricare alt element este obţinut prin însumarea celor două elemente vecine cu el, aflate pe coloana anterioară, unul pe aceeaşi linie cu el, iar celălalt pe linia următoare, ca în exemplu.

Programul afişează pe ecran tabloul obţinut, fiecare linie a tabloului pe câte o linie a ecranului, elementele fiecărei linii fiind separate prin câte un spaţiu. Exemplu: pentru n=4, pe ecran se afişează: (10p)

1	3	8	20
2	5	12	23
3	7	11	15
4	4	4	4

Subiectul al III-lea

Pentru itemul 1, scrieţi pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Subprogramul f este definit alăturat. Indicaţi ce se afişează în urma apelului de mai jos.

f(2016); (4p.)

```
procedure f(n:integer);
begin   if n<>0 then
        begin   write(n);
                f(n div 10)
        end
end;
```

a. 6102 b. 2202012016 c. 2016201202 d. 20162012020

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare dintre cerinţele următoare.

2. Având la dispoziţie cinci tipuri de prăjituri, cu pere, cu mure, cu afine, cu fragi, cu zmeură, se utilizează metoda backtracking pentru a obţine toate posibilităţile de a forma platouri cu câte trei tipuri de prăjituri diferite, ştiind că în cadrul unui platou nu contează ordinea de aşezare a prăjiturilor şi că prăjiturile cu mure nu vor fi plasate pe acelaşi platou cu prăjiturile cu fragi. Primele patru soluţii obţinute sunt, în această ordine: (pere, mure, afine), (pere, mure, zmeură), (pere, afine, fragi), (pere, afine, zmeură). Scrieţi cea de a 5-a şi cea de a 6-a soluţie, în ordinea obţinerii lor. (6 p.)

3. Subprogramul cifreImpare are un singur parametru, n, prin care primeşte un număr natural cu toate cifrele nenule ($n \in [1,10^9]$). Subprogramul returnează numărul obţinut prin eliminarea tuturor cifrelor impare din n, respectiv -1 dacă nu există astfel de cifre sau dacă toate cifrele lui n sunt impare. Scrieţi definiţia completă a subprogramului.

Exemplu: dacă n=23541 subprogramul returnează 24, iar dacă n=28 subprogramul returnează -1. (10p.)

4. Fişierul numere.in conţine pe prima linie un număr natural n ($n \in [2,10^9]$), iar pe a doua linie un şir de cel mult 10^9 numere naturale din intervalul [1,n]. Numerele din şir sunt ordonate crescător şi sunt separate prin câte un spaţiu. Se cere să se determine valorile naturale distincte din intervalul [1,n] care NU se găsesc în şirul menţionat mai sus. Valorile determinate se afişează pe ecran în ordine strict crescătoare, separate prin câte un spaţiu. Dacă nu există astfel de valori, se afişează pe ecran mesajul Nu exista.

Pentru determinarea valorilor cerute se utilizează un algoritm eficient din punctul de vedere al memoriei şi al timpului de executare.

Exemplu: dacă fişierul conţine numerele

```
10
3 4 4 8
```

se afişează pe ecran valorile

1 2 5 6 7 9 10

a) Descrieţi în limbaj natural algoritmul utilizat, justificând eficienţa acestuia. (4p.)

b) Scrieţi programul Pascal corespunzător algoritmului descris. (6p.)

Rezolvare:

Subiectul I

1. d
2. **a)** 14 28

   b) 2 4 3

   c)

```
repetă
  dacă  m%x=0 şi n%x=0 atunci p←x
  altfel
    dacă  m%x=0 atunci n←n-1
    altfel m←m+1
    ■
  ■
până când m>=n sau p<>0
```

   d)

```
program SI2d;
var m, n, x, p : word;
begin
      write('m='); readln(m);
      write('n='); readln(n);write('x='); readln(x);
      p:=0;
      while (m<n) and (p=0) do
            if (m mod x=0) and (n mod x=0) then p:=x
                  else if m mod x=0 then n:=n-1
                        else m:=m+1;
write(m,'  ',n);
readln;
end.
```

Subiectul al II-lea

1. a
2. b
3. 2, 3, 8
4. 11matematica

5.

```
program subII5;
var   n, i, j : word;
      a : array[1..100,1..100] of word;
begin
      write('n=');readln(n);
      for i:=n downto 1 do
      for j:=1 to n do
      if i=n     then a[i,j]:=n
                 else if j=1 then a[i,j]:=i
                 else a[i, j]:=a[i+1, j-1]+a[i, j-1];
      for i:=1 to n do
      begin      for j:=1 to n do write(a[i,j],'   ');
                 writeln;
      end;
      readln;
end.
```

SUBIECTUL al III-lea

1. c

2. (pere, fragi, zmeură)
(mure, afine, zmeură)

3.

```
function cifreImpare(n:longint):longint;
var   z, h : longint; nr : byte;
begin      nr:=0;     {numărul cifrelor pare}
 h:=0;     {numărul format cu cifrele pare}
 z:=1;
 while n>0 do
 begin     if n mod 2=0 then
                   begin
                            nr:=nr+1;
                            h:=h+z*(n mod 10);
                            z:=z*10;
                   end;
           n:=n div 10;
 end;
 if nr>0   then cifreImpare := h
       else cifreImpare := -1;
end;
```

4.

a) Programul este eficient din punct de vedere al utilizării memoriei, deoarece nu s-au folosit structuri de date unidimensionale sau bidimensionale, iar eficiența timpului de executare este justificată prin deschiderea fișierului o singură dată, prin lipsa algoritmilor de sortare și prin nefolosirea excesivă a structurii condiționale. Numerele din fișier nu sunt memorate într-un vector. Algoritmul se bazează pe citirea numerelor din fișier, unul cate unul și prelucrarea acestor numere în momentul citirii. Se poate proceda în modul următor: se afișează toate numerele naturale din intervalul [1,x), unde x este primul număr din fișier, apoi se parcurg numerele din fișier memorând, la fiecare pas, ultimele două numere citite, x și y, și afișând toate numerele naturale din intervalul (x,y). La final, se afișează numerele din intervalul (y,n].

b)
```
program subIII4;
var n,x,i,y:longint;
f:text;
begin
    assign(f,'numere.in');
    reset(f);
    y:=0;
    i:=0;
    readln(f,n);
    while not eof(f) do
    begin
        read(f,x);
        if y<x-1 then
            for i:=y+1 to x-1 do write(i,' ');
        y:=x;
    end;
    close(f);
    if y<n then
        for i:=y+1 to n do write(i,' ');
    if i=0 then writeln('Nu exista');
    readln;
end.
```

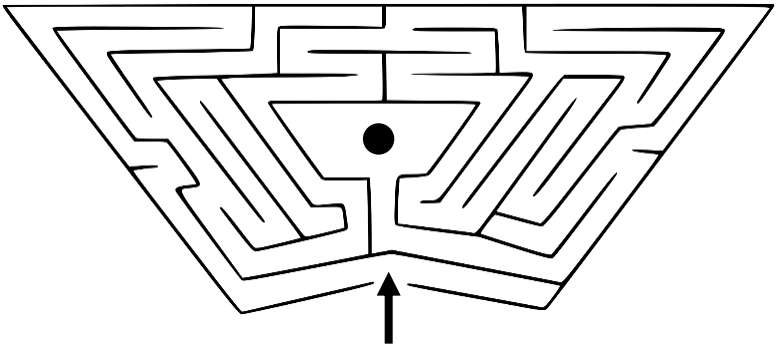
Între jocuri şi matematică

prof. Klára Alexuţan
C.T. ”Alesandru Papiu-Ilarian” Zalău

1. Labirintul de la Hampton Court

Palatul Hampton Court a fost reşedinţa monarhilor englezi între secolele al XVI-lea şi al XIX-lea. Aici, în grădinile de nord, se găseşte cel mai faimos labirint din Marea Britanie. Realizat din gard viu de tisa, plantat cândva între 1689 şi 1695, labirintul se întinde pe o suprafaţă de aproximativ 1350 m^2. Aleile sale şerpuitoare însumează cam 0,8 km, iar ”zidurile” au peste 2 metri înălţime, astfel încât vizitatorii nu îşi pot căuta ieşirea privind pe deasupra. Labirintul a fost descris în cărţile multor scriitori, printre care Daniel Defoe şi Jerome K. Jerome.

Pornind în direcţia îndicată de săgeată, încercaţi să ajungeţi în punctul din centru.



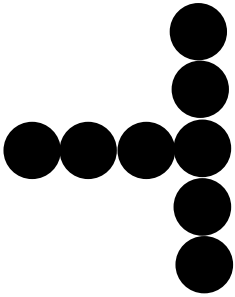
2. Şase-şapte

Cum se pot folosi trei de 6 pentru a obţine un 7?

3. Gardul

Dacă se aşează câte o cioară pe un par, rămâne o cioară fără par. Dacă se

așează câte două ciori pe un par, rămâne un par fără cioară. Câte ciori și câți pari sunt?



4. Șiruri de 5 monede

Mută o singură monedă, astfel încât să obții două șiruri de câte 5 monede.

5. 8 bile

Se dau 8 bile de aceeași mărime și culoare. Șapte dintre ele sunt din metal nobil și au aceeași greutate, iar una dintre ele, fiind falsă, este mai ușoară. Cum putem stabili prin numai două cântăriri, pe o balanță, care este falsă?

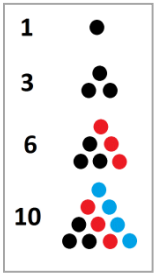
Bibliografie

1. **Moscovich, Ivan,** *Marea carte a jocurilor minţii*, volumul I, Editura Litera, Bucureşti, 2009
2. **Popescu, Titus,** *Matematica de vacanţă*, Editura Sport-Turism, Bucureşti, 1986

Lecţia de informatică
Despre numere (6)

prof. Paula – Cristina Deac
C.T. ”Alesandru Papiu-Ilarian” Zalău

Numere triangulare



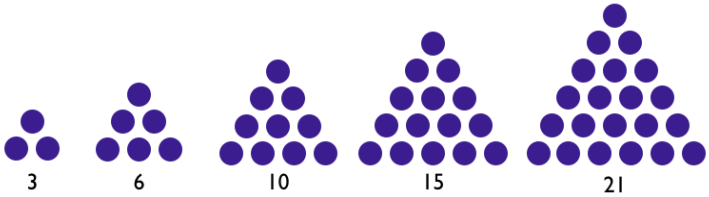
Un număr natural *x* se numeşte *triangular* dacă există un număr natural *n* astfel încât suma primelor *n* numere este egală cu *x*.

$$x = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

De exemplu, numerele 1, 3, 6, 10 sunt triangulare, deoarece:

1
1+2 = 3
1 + 2 + 3 = 6
1 + 2 + 3 + 4 = 10

Din punct de vedere geometric, un număr triangular este numărul de puncte dintr-un triunghi echilateral umplut uniform cu puncte. De exemplu, trei puncte pot forma un triunghi şi deci 3 este un număr trianghular. Al *n*-lea număr triunghiular (notat T_n sau $T(n)$) este numărul de puncte dintr-un triunghi cu *n* puncte pe latură.



Proprietăţile acestei serii au fost studiate pentru prima dată de matematicienii Grecii antice, în special de pitagoreni. Este cunoscută chiar o povestioară despre matematicanul Karl Gauss: *Odata, când înca era la şcoală, pentru a face linişte în clasă, profesorul său le-a cerut elevilor să adune toate numerele de la 1 la 100. După câteva secunde, Gauss s-a ridicat în picioare şi a dat răspunsul corect: 5050. Cum a făcut asta? A adunat întâi primul număr cu ultimul număr (1+100), apoi al doilea cu penultimul (2+99). Şi-a dat seama că poate face asta de 50 de ori, aşa că răspunsul corect trebuia să fie 50x101.*

Proprietăți ale numerelor triangulare

- Daca T este un număr triangular, atunci 9*T + 1 va fi de asemenea un număr triangular;
- Daca T este un număr triangular, atunci 8*T + 1 va fi un pătrat perfect;
- Un număr triangular nu se poate termina niciodată în 2, 4, 7 sau 9;
- Orice număr întreg poate fi obținut adunând până la maxim trei numere triangulare. Această proprietate a fost descoperită și demonstrată de Karl Gauss acum 200 de ani.
- Suma cifrelor unui număr triangular până când rămâne o singură cifră va fi întotdeauna 1, 3, 6 sau 9;
- Suma a *n* numere ridicate la cub consecutive începand cu 1 este egal cu pătratul celui de-al *n* numar trianghular: $T(n)^2 = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$
  - $T(4)^2 = 10^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$ sau
  - $T(5)^2 = 15^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$.
- Toate numerele perfecte sunt numere triangulare (Știm că un număr perfect este de forma $2^{n-1}(2^n-1)$);
- O altă proprietate interesantă:
  - T1 + T2 + T3 = T4
  - T5 + T6 + T7 + T8 = T9 + T10
  - T11 + T12 + T13 + T14 + T15 = T16 + T17 + T18
  - T19 + T20 + T21 + T22 + T23 + T24 = T25 + T26 + T27 + T28
- Daca un grup de n persoane se salută între ele, atunci numărul total de saluturi va fi *T(n-1)*.

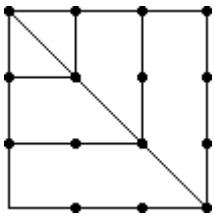
Numere pătratice

Un număr *x* se numește *pătratic* dacă există un număr natural *n*, astfel încât *x* să fie egal cu suma primelor *n* numere naturale impare:

$x = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

De exemplu, numerele 1, 4, 9, 16 sunt pătratice, deoarece:

1
1+3 = 4
1+3+5 = 9
1+3+5+7 = 16



Proprietăți ale numerelor pătratice

- Suma a două numere triangulare consecutive va fi întotdeauna un număr pătratic:

  $$T1 + T2 = 1 + 3 = 4 \quad \text{sau } T2 + T3 = 3 + 6 = 9$$

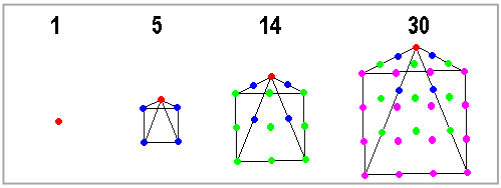
- Numerele pătratice au întotdeauna un număr impar de divizori pozitivi;
- Orice număr întreg pozitiv poate fi scris ca sumă de 4 sau mai puține numere pătratice. (Teorema celor 4 pătrate a lui Lagrange);
- Un număr pătratic nu poate fi număr perfect.

Numere piramidale

Un număr *x* se numește *piramidal* dacă există un număr natural *n*, astfel încât *x* să fie egal cu suma primelor *n* numere naturale pătratice.

De exemplu, numerele 1, 5, 14, 30 sunt piramidale, deoarece:

1
1+4 = 5
1+4+9 = 14
1+4+9+16 = 30



Problemă rezolvată

Se citește de la tastatură un număr natural *n*. Să se afișeze primele *n* numere *piramidale*.

Implementare în C++

```
#include <iostream>
int n, i, s;
void  main( )
{
      cout<<"n="; cin>>n;
      s=0;
      for (i=1; i<=n; i++)
          {
           s+=i*i;
           cout<<s<<"  ";
          }
}
```

Probleme propuse

1. Se citeşte de la tastatură un număr natural *n*. Să se verifice dacă este triangular și să se afişeze un mesaj corespunzator.
2. Să se afişeze primele *n* numere triangulare în fişierul *triangular.txt*, unde *n* este un număr natural citit.
3. Să se verifice dacă numărul natural *n*, citit de la tastatură, este pătratic și să se afişeze un mesaj corespunzător. În cazul în care numărul nu este pătratic, să se afişeze numărul cel mai apropiat de *n*, care este pătratic.
4. În fişierul *date.in* se găsesc mai multe numere naturale. Să se creeze fişierele *tri.out* și *alte.out*, care să conțină numerele triangulare, respectiv numerele care nu sunt triangulare din fişierul dat.
5. Fie şirul de numere naturale 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ... Să se calculeze și să se afişeze valoarea celui de-al *n*-lea termen al şirului (*n* număr natural citit de la tastatură), fără să se genereze termenii şirului.

Bibliografie

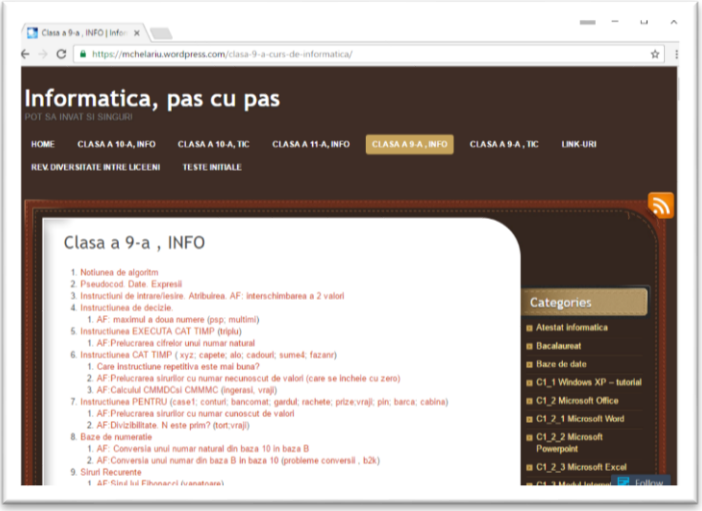
1. Clara Ionescu, Adrian Negreanu Maior, Adina Bălan – *Informatică pentru grupele de performanţă*, Editura Dacia Educaţional, Cluj – Napoca, 2004.
2. Carmen Bucur, Doina Bucur, Adrian Pintea, Crina Salaţiu, Florentina Stanca, Dana Vaida, Iulia Bucur – *Culegere de probleme pentru liceu*, Editura U.T. Pres, Cluj-Napoca 2002
3. O. Ore – *Number Theory and Its History*, Dover Publications, New York, 1988.
4. W. Sierpinski – *Elementary Theory of Numbers*, Warszawa, 1964.
5. https://en.wikipedia.org/wiki/Triangular_number
6. Nicolae Mihăileanu – *Istoria matematici. Antichitatea, Evul mediu, Renaşterea*, Editura enciclopedică română, Bucureşti, 1974.

Informatica pe Internet

Prof. Ioana Ionescu
C.T. ”Alesandru Papiu Ilarian” Zalău

Voi prezenta în acest număr inițiativa lăudabilă a unui profesor de informatică, pe numele său Chelariu Mihai, de a crea material didactic online pentru uzul elevilor și nu numai. Site-ul domniei sale este https://mchelariu.wordpress.com/ și acoperă subiecte precum:

- Sistemul de operare Windows
- Elemente de Internet
- Pachetul Microsoft Office
- Programare



De asemenea, articolele sunt ordonate în funcție de clasă și materie (TIC și Informatică).

Limbajul C/C++ este prezentat succint conform programei, de exemplu la clasa a X-a (neintensiv) sunt:

1. Alfabet, identificatori, constante, variabile
2. Tipuri
3. Operatori. Expresii
4. Structura unui program C/C++

5. Citirea. Afişarea
6. Atribuirea
7. Instrucţiunea IF
8. Instrucţiunea DO – WHILE
9. Instrucţiunea WHILE
10. Instrucţiunea FOR
11. Baze de numeraţie
12. Fişiere în C/C++
13. Tablouri. Vectori
14. Tablouri. Matrici

Datorită faptului că site-ul este structurat sub forma unui blog, utilizând platforma Wordpress, toţi participanţii, atât elevi cât şi profesori, pot face schimb de idei şi să comenteze asupra informaţiilor publicate.

Demnă de menţionat este şi secţiunea *Bacalaureat – competenţe digitale*, unde puteţi găsi diferite modele de fişiere de lucru precum şi subiecte din perioada 2009 – 2016.

Îi mulţumim domnului profesor Chelariu Mihai pentru informaţiile utile puse la dispoziţie şi sper să vă fie de folos în pregătirea şcolară.

Prezi - alternativă la programul Microsoft PowerPoint

Prof. Mureşan Alexandru
C.T. "Alesandru Papiu Ilarian"Zalău

Prezentarea unui proiect reprezintă o provocare pentru oricare dintre noi, fie că suntem profesori, elevi, studenţi, angajaţi sau chiar manageri, deoarece ajută publicul să îşi formeze o imagine de ansamblu. Prezi este o aplicaţie web prin intermediul căreia puteţi concepe prezentări mult mai atractive şi mai convingătoare decât cele realizate în Microsoft PowerPoint.

Ceea ce face diferenţa este atât grafica prietenoasă, cât şi posibilitatea de a evidenţia relaţiile dintre componentele prezentării, fără a le „rupe" în slide-uri, aşa cum se întâmplă în prezentările clasice. Prezentarea poate fi realizată, accesată și modificată online, sau descărcată pe calculatorul personal, pe care poate fi și editată prin intermediul programului Prezi Desktop. Varianta online impune restricții de spațiu, pe când cea desktop nu.

Pe măsură ce utilizatorul crează și editează prezentarea în Prezi, fiecare element pe care îl adaugă poate fi mutat, redimensionat, rotit; de asemenea poate fi schimbat aspectul general al prezentării, făcând click pe o galerie de stiluri. Ceea ce oferă Prezi, atunci când rulează în browser, este un tur animat și nu o serie de slide-uri. Parcurgerea elementelor se face cu efecte de mărire și micșorare (zoom in și zoom out).

Crearea unei prezentări este destul de ușoară. Cel mai bun mod de a învăţa modalitatea de utilizare a acestui software este exersarea practică şi vizionarea altor prezentări. Timpul de acomodare cu acestă unealtă este relativ scurt, interfaţa utilizatorului fiind destul de intuitivă. Există, de asemenea, o multitudine de tutoriale video.

Aplicaţia este concepută în întregime în Flash şi este o adevărată plăcere de a o utiliza. Proiectarea este rapidă, deşi poate dura ceva vreme până vă obişnuiţi. Acest lucru nu se datorează faptului că interfaţa este prost concepută, ci se datorează faptului că acest concept este complet diferit, oferind posibilități de mărire, de import a diferitelor fișiere media (imagini, videoclipuri, videoclipuri YouTube, PDF, etc), de colaborare online în timp real, de prezentare online și ofline.

Prezi este un serviciu de prezentări inovator, bazat pe cloud, uşor de creat, uşor să împărtăşit prin intermediul Web. Se poate edita și modifica și de pe calculatorul personal prin intermediul Prezi Desktop.

Una dintre probleme este lipsa posibilităţii de a schimba proporţiile unui element grafic. La schimbarea formei unui şablon, astfel încât unele

elemente nu se mai încadrează perfect într-o ramă creată anterior, nu există vreo modalitate de a întinde cadrul, astfel încât s-a păstrat aceeaşi lăţime, devenind mai înalte sau mai scurte. Soluţia este ştergerea cadrului existent şi crearea unuia nou care se potriveşte în jurul elementelor redimensionate.

Elevii şi profesorii pot crea acum prezentări Prezi gratuite, existând un pachet de licenţă educaţională, facilitând utilizarea acestuia în diferite stiluri de învăţare. În învăţământul primar, Prezi poate fi folosit ca un mediu interactiv pentru învăţarea non-lineară de explorare şi lineară pentru învăţarea de tip instruire. Echipa de la Prezi a lansat o resursă numită Prezi Explore, o colecţie de prezentări licenţiate pentru refolosire şi adaptabile. Aceasta este o resursă excelentă pentru cadrele didactice care pot utiliza o prezentare precompilată pe un concept dificil pentru a da o nouă perspectivă elevilor. Această secțiune dedicată mediului educațional se găsește la adresa http://edu.prezi.com/.

Prezi vă permite să vă înregistraţi sub trei forme: cont gratuit pentru orice utilizator, cont gratuit pentru profesori şi elevi și cont premium.

Prezi permite crearea de prezentări doar online pentru conturile gratuite şi offline pentru conturile premium. După finalizarea creări unei prezentări aveţi două opţiuni: să o prezentaţi direct de pe site sau să decărcaţi o copie şi să faceţi o prezentare offline. Dacă o prezentare offline conţine filmuleţe, calculatorul trebuie să fie conectat la Internet.

Pentru a descărca prezentarea mergeţi în contul Dvs. la „Your Prezis”, daţi click pe prezentarea dorită şi apăsaţi butonul „Download”. Trebuie să dezarhivaţi fişierul care se va descărca, intraţi în directorul în care se dezarhivează şi rulaţi fişierul prezi.

Sper ca informațiile expuse succint în acest material să constituie punctul de plecare în învățarea unui nou program util în activitatea oricărui cadru didactic, permițându-vă astfel să realizați ușor și rapid prezentări de succes.

Bibliografie:

[1] https://prezi.com/lpe3paxdr95k/prezi-in-cateva-lectii/, Accesat Septembrie 2016

[2] http://www.computerica.ro/prezi-solutia-pentru-prezentari-reusite/, Accesat Septembrie 2016

[3] http://www.rgstuff.ro/prezi-sau-de-ce-renuntam-la-powerpoint/, Accesat August 2016

[4] https://prezi.com/ , Accesat August 2016

Clubul rezolvitorilor de probleme

Inspector şcolar,
Prof. Adonia Augustina Opriş

Sper că problemele din ediţiile anterioare nu v-au creat „probleme” şi ca atare vă propun altele spre rezolvare.

Clasa a IX – a

1. Se consideră mulţimea nevidă M cu proprietatea că $x \in M \Rightarrow \left(1-\frac{1}{x}\right) \in M$.

a) Arătaţi că $1 \notin M$.

b) Demonstraţi că mulţimea M are trei elemente.

2. Se consideră un triunghi ABC şi punctele M, N, P astfel încât $2 \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BN} = 2 \cdot \overrightarrow{NM}$ şi $AN \cap BC = \{P\}$. Demonstraţi că $MP \parallel AB$.

Clasa a X – a

1. Arătaţi că $\left(\frac{a^2}{bc}\right)^{\lg\frac{b}{c}} \cdot \left(\frac{b^2}{ac}\right)^{\lg\frac{c}{a}} \cdot \left(\frac{c^2}{ab}\right)^{\lg\frac{a}{b}} = 1$ pentru orice $a, b, c \in (0, +\infty)$.

2. Arătaţi că există şi sunt unice numerele raţionale a, b astfel încât $\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$.

Clasa a XI – a

1. În mulţimea $M_2(R)$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $X(a) = I_2 + aA,\ a \in R$.

a) Să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+ab), \forall a, b \in R$.

b) Să se calculeze $(X(1))^2$.

c) Să se demonstreze prin inducţie matematică că
$\left(X\left(1\right)\right)^n = X\left(2^n - 1\right),\ \forall n \in N^*$.

2. Se consideră funcţia $f : D \to R,\ f\left(x\right) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}$

a) Să se determine D, domeniul de definiţie al funcţiei f.

b) Să se găsească $a, b \in R$ pentru care $f\left(x\right) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2}, x \in D$ determinat anterior.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2} f\left(x\right)\right)^x$.

Clasa a XII – a

1. În mulţimea $M_2\left(R\right)$ se consideră

$$G = \left\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in Z, a^2 - 2b^2 = 1\right\}.$$

a) Să se arate că G este parte stabilă a $M_2\left(R\right)$ în raport cu înmulţirea matricelor.

b) Să se găsească o matrice $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}, b \neq 0$ din mulţimea G.

c) Să se arate că mulţimea G conţine o infinitate de elemente.

2. a) Să se găsească $a, b \in R$ astfel încât

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}, \forall x \in R_+^*$$

c) Dacă

$f, g, F : R \to R,\ f\left(x\right) = \dfrac{1}{e^x + a}, a > 0,\ g\left(x\right) = \dfrac{1}{\left(e^x + a\right)\left(e^x + b\right)}$ şi

$F\left(x\right) = \dfrac{1}{a}\left(x - \ln\left(e^x + a\right)\right)$ să se arate că F este o primitivă a lui f şi să se calculeze $\int g\left(x\right)dx$.

Bazar

Matematica în filatelie (7)

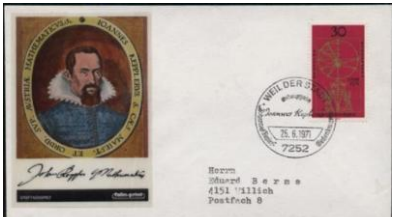
Prof. Matyas Mirel
C.T. ”Alesandru Papiu Ilarian” Zalău

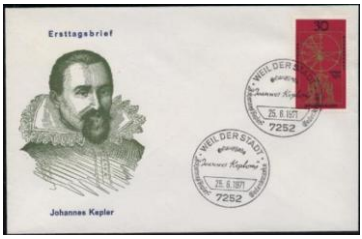
Unul dintre marii oameni de știință, care poate fi foarte bine catalogat atât ca matematician cât și ca astronom a fost Johannes Kepler (1571 – 1630). Având studii teologice la Universitatea din Tübingen, Kepler a dat curs dorinței sale de a studia matematica în defavoarea celei de a deveni preot protestant. Astfel, în 1594 acceptă funcția de profesor de matematică și astronomie la Universitatea din Graz. Are cercetări importante în astronomie în urma cărora enunță în 1596 în lucrarea Mysterium Cosmographicum (Misterul lumii cosmice) prima lege a mișcării planetelor: *”Planetele se mișcă în consecință pe o traiectorie eliptică, în centrul căreia se află Soarele”*. Următoarele legi ale mișcării planetelor sunt formulate în contexte diferite. În anul 1601, devine matematician și astronom imperial la Praga, după ce ani buni a fost discipolul lui Tycho Brahe. Observă supernova din 1604, iar în 1609 publică lucrarea Astronomia Nova (Astronomia Nouă) în care enunță ce-a de a doua lege care-i poartă numele: *”Cu cât o planetă este mai aproape de Soare, cu atât se mișcă mai repede.”*Câțiva ani mai târziu, Kepler se mută la Linz în Austria, unde în anul 1619 îi apare lucrarea Harmonices Mundi (Armonia Lumii) în care enunță și cea de a treia lege: *”Pătratul timpului de revoluție este proporțional cu cu puterea a treia a distanței medii dintre o planetă și Soare”*.

Din punct de vedere matematic, Kepler este considerat un precursor al calculului integral, dezvoltat ulterior de cercetările lui Newton și Leibnitz.

O figură atât de proeminentă, care a revoluționat practic modul în care vedem universul, nu putea să lipsească din reprezentările filatelice ale diferitelor state. Din episoadele anterioare ale acestui serial, ne-am obișnuit deja cu ideea că de regulă, cu ocazia diferitelor aniversări, sunt emise mărci poștale cu efigia respectivei personalități. Așa s-a întâmplat și în cazul lui Kepler. Iată câteva dintre acestea.

În 1971 se aniversau 400 de ani de la naşterea lui Johannes Kepler, prilej pentru diferite emisiuni filatelice. Cele două Germanii (Republica Democrată şi Republica Federală) emit fiecare timbre didicate lui Kepler. Astfel, Republica Federală a Germaniei pune în circulaţie un timbru cu valoarea de 30 pfennigi, dar şi 4 plicuri filatelice prima zi (First Day Cover). Trei dintre plicuri sunt parafate cu ştampilă de Weil Der Stadt (localitatea natală a lui Kepler) iar alt plic e parafat cu o ştampilă de Bonn (capitala de atunci a RFG).



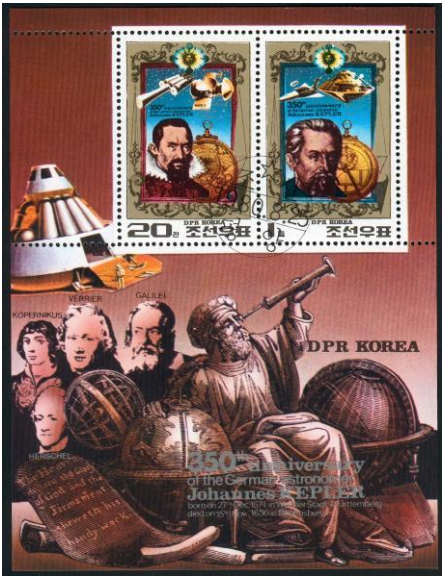


Germania Democrată emite în acelaşi an seria filatelică ”Aniversări” formată din 3 mărci poştale. Unul dintre timbre este dedicat lui Kepler.

În anul 1972, Fujeira pune în circulaţie 6 mărci poştale dedicate lui Kepler, având valorile de 35 dirham, 75 dirham, respectiv 1,2, 3 şi

5 ryal. Timbrele sunt viu colorate, conțin portretul lui Kepler și aluzii la legile sale sau la diferitele momente ale cuceririi spațiului cosmic.

Și alte țări, în special cele aflate atunci în blocul comunist, emit mărci poștale dedicate în general spațiului cosmic și în special lui Kepler. Era firesc, omenirea abia intrase în Era Cosmică iar o aniversare a unuia dintre precursorii acesteia, era binevenită. Poșta Română pune în circulație în 1971 marca poștală cu valoarea de 55 de bani, parte a seriei ”Aniversări III. Oamnei de știință”. Kepler apare alături de naviogatorul F.Magellan, cosmonautul I.Gagarin și fizicianul E.Rutherford.



Alte țări care au emis timbre dedicate lui Kepler în anii 1971-1972 au fost Mexic, Ajman, Austria, Benin, Ecuador, Mali, Insulele Coch, Yemen, Insulele Comores, Ungaria și Dahomey.

Un alt an aniversar a fost 1980 când se împlineau 350 de ani de la moartea lui Kepler. Corea de Nord lansează o coliță având doua timbre cu Kepler. Designul coliței conține portretele altor astronomi celebri: Copernic, Verrier, Galilei, sau

Herschell. În același an, țări precum Mali și Insulele Comores emit de asemenea mărci poștale dedicate lui Kepler.

Mai aproape de zilele noatre, în anii 2008-2009 apar o serie de emisiuni filatelice care fac referiri și la Johannes Kepler. Se marchează astfel aniversarea a 400 de ani de la publicarea lucrării *Astronomia Nova*, iar 2009 era declarat de UNESCO Anul Internațional al Astronomiei. Din lipsă de spațiu nu vom putea publica toate aceste emisiuni, însă cele emise de Mozambic sunt cu adevărat excepționale.

În fine, din punct de vedere cronologic, ultima marcă poștală dedicată lui Kepler este emisă în anul 2015 de către Republica Ciad.

Bibliografie:

1. *Image of Mathematicians on Postage Stamp* (http://jeff560.tripod.com/stamps.html);

2. *Collection Mathematics* (http://www.maths.bris.ac.uk/~hb0262/Collection/Mathematics/JK/JK.htm);

Premiul ”Ioan Mocan” 2016

Prof. Matyas Mirel
C.T. ”Alesandru Papiu Ilarian” Zalău

Ca în fiecare an, catedra de matematică-informatică a Colegiului Tehnic ”Alesandru Papiu Ilarian”, acordă cu sprijinul lui Remus Mocan – fiul regretatului profesor Ioan Mocan un premiu, elevului care pe parcursul anului a obținut cele mai bune rezultate la matematică și informatică.

Pentru al doilea an consecutiv, premiul a fost acordat elevului Baboș Sebastian din clasa a XII-a H, pregătit de doamna profesoară Asztalos Lia. Premiul a fost acordat pentru rezultatul de excepție obținut la etapa națională a Concursului de Matematică Aplicată ”Adolf Haimovici” și anume premiul I. Acest rezultat vine după patru ani de muncă asiduă și după premiul II (în clasa a IX-a) și mențiune (în clasele a X-a și a XI-a) obținute la etapa națională a aceluiași concurs.

Despre Baboș Sebastian s-a vorbit și la Radio România Actualități, grație unui interviu pe care jurnalistul Adrian Lungu i l-a luat lui și doamnei profesoare Asztalos Lia.

Profil

Şortan Raluca şi Balog Bogdan
clasa a XII-a A, profil matematică – informatică, promoţia 2015-2016

Prof. Sîrb Vasile
C.T. ”Alesandru Papiu Ilarian” Zalău

A devenit o tradiţie participarea elevilor de la Colegiul Tehnic „Alesandru Papiu Ilarian” la Sesiunea Interjudeţeană de Referate şi Comunicări a elevilor la disciplina matematică, intitulată „Faţă-faţă cu adevărul”. Această întrecere se desfăşoară în fiecare an la Liceul Teoretic „Emil Racoviţă” din Baia Mare şi este organizată de catedra de matematică din această instituţie, ISJ Maramureş şi Societatea de Ştiinţe Matematice din România – Filiala Maramureş. Participă elevi din clasele VII - XII din judeţele Maramureş, Sălaj, Satu Mare şi Cluj.

În acest număr al revistei MI-API vă prezentăm doi absolvenţi ai Colegiului Tehnic „Alesandru Papiu Ilarian” care au participat în fiecare an la această Sesiune de referate, începând din clasa a X-a. Aceştia sunt **Şortan Raluca şi Balog Bogdan (clasa a XII-a A)**. Sub îndrumarea profesorului de matematică Sîrb Vasile, elevii au studiat şi aprofundat diferite teme, au elaborat lucrările şi le-au prezentat într-o manieră profesionistă în faţa comisiilor formate din cadre didactice de specialitate. Munca de cercetare a celor doi elevi s-a concretizat în rezultate frumoase obţinute în cei trei ani de participare, şi anume:

- Menţiune (clasa a X-a) la ediţia din 2013

- **Premiu I şi medalie** din partea S.S.M.R. Maramureş (clasa a XI-a) la ediţia din 2014.

- Menţiune (clasa XII) la ediţia din 16 decembrie 2015.

De asemenea eleva **Raluca Şortan** şi elevul **Balog Bogdan** au participat şi la fazele judeţene a Sesiunii de Referate şi Comunicări ale elevilor din Sălaj. Datorită seriozităţii de care au dat dovadă şi aici, au obţinut rezultate notabile: menţiune (în clasa a X-a), **premiul I** (în clasa a XI-a), **premiul III** (în clasa a XII-a).

Eleva **Raluca Şortan** s-a remarcat pe parcursul celor patru ani petrecuţi în liceul nostru şi prin bogata activitate extraşcolară pe care a desfăşurat-o:

- Preşedinte Consiliul Şcolar al elevilor în perioada (2014-2015)
- Ecoambasador în cadrul proiectului Ecoprovocarea (2011-2012)
- Consilier în cadrul C.L.T.(Consiliul Local al Tinerilor Zalău (2012-2014)
- Secretar în cadrul CJE (Consiliul Judeţean al Elevilor (2014-2015)
- Trainer coordonator în cadrul proiectului Liderii Mileniului Trei (2014-2015)
- Reprezentant al elevilor în Consiliul de Administraţie al şcolii (2015-2016)

Cei doi absolvenţi, **Şortan Raluca şi Balog Bogdan,** ai Colegiului Tehnic „Alesandru Papiu Ilarian" promoţia 2016, sunt în prezent studenţi ai Universităţii Tehnice din Cluj Napoca.

Îi felicităm pentru rezultatele frumoase obţinute la concursurile şi activităţile şcolare în timpul anilor de liceu, le mulţumim pentru că au reprezentat cu cinste Colegiul Tehnic „Alesandru Papiu Ilarian" Zalău şi le dorim mult succes în viaţă.

Informații utile
Cum se poate publica în revista MI API ?

Revista de Matematică și Informatică MI API se adresează tuturor celor care se simt atrași de matematică și informatică. Este deschisă atât elevilor cât și profesorilor de la Colegiul Tehnic ”Alesandru Papiu Ilarian” Zalău, dar și de la alte școli din județ sau din țară.

Profesorii de matematică, care vor să publice articole, studii, chestiuni de metodică, probleme propuse etc, trebuie să trimită pe adresa redacției materialele redactate în format electronic, respectând următoarele condiții:

- pentru editarea materialelor se va folosi una din versiunile Microsoft Office 2007 sau 2010;
- pagina va fi setată la A5, textul va fi scris cu fontul Times New Roman, dimensiunea acestuia va fi de 11;
- pentru editarea formulelor și a ecuațiilor matematice se va folosi editorul de ecuații implicit;
- figurile geometrice se vor realiza astfel încât acestea să fie lizibile;
- articolele vor fi însoțite de numele autorului / autorilor precum și de școala de proveniență a acestora;
- sursele de informații folosite se vor indica în bibliografie;
- se recomandă ca textele să nu depășească 4 pagini A5;

Elevii, indiferent de școala de proveniență, pot publica articole în revista MI API dacă au recomandarea profesorului de matematică sau informatică de la clasă. Respectarea cerințelor prezentate mai sus sunt obligatorii și pentru aceștia.

Redacția își rezervă dreptul de a selecta materialele trimise spre publicare. De asemenea, responsabilitatea în ce privește conținutul articolelor revine în totalitate autorilor.

Cuprins

MI API – premiul I la etapa județeană a concursului revistelor şcolare 1
Chestiuni metodice
Analiză matematică clasa a XI-a. Metode de abordare. Comentarii. Sugestii..... 2
Examene. Concursuri
Examenul de Bacalaureat sesiunea iunie-iulie 2016, M1..... 10
Examenul de Bacalaureat sesiunea iunie-iulie 2016, M2..... 13
Examenul de Bacalaureat sesiunea august 2016, M1..... 16
Examenul de Bacalaureat sesiunea august 2016, M2..... 19
Examenul de Bacalaureat sesiunea iunie-iulie 2016, Informatică, limbajul Pascal..... 22
Între jocuri şi matematică..... 28
Lecția de informatică. Despre numere (6) 30
Informatica pe Internet..... 34
Prezi – Alternativă la programul Microsoft PowerPoint 36
Clubul rezolvitorilor de probleme 38
Bazar
Matematica în filatelie (7)..... 40
Premiul *"Ioan Mocan"* 2016 44
Profil: *Șortan Raluca și Balog Bogdan*..... 45
Informații utile..... 47