REVISTA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ MI API

Anul VII nr.7 (17) – martie 2015

REVISTA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ MI API
serie nouă, anul VII nr.7 (17) – martie 2015

Adresa redacției

Colegiul Tehnic ”Alesandru Papiu Ilarian”
450099 – Zalău
B-dul Mihai Viteazul Nr.59
corp A, et.3 sala 35
tel/fax: 0260-616001
e-mail: mi_api@yahoo.com

Colectivul de redacție:

Coordonator:
prof. Mirel Matyas

Colaboratori:
prof. Adonia Opriș
prof. Paula Deac
prof. Ioana Ionescu
prof. Klára Alexuțan
prof. Lia Asztalos
prof. Manuela Sabou
prof. Loredana Gavriș
prof. Vasile Sîrb

Machetare:
prof. Mirel Matyas

Design copertă:
Kulcsár Ferenc

ISSN 2248 – 339X
ISSN-L 2248 – 339X

Tipărit la **Tehno-Print Zalău**

Cuprins

Matematica şi Informatica la Colegiul Tehnic API Zalău	1
Chestiuni metodice	2
Tipuri de cerințe pentru Examenul de Bacalaureat. Amaliză Matematică, clasa a XI-a.....	2
Examene. Concursuri Simularea Examenului de bacalaureat la matematică, clasa a XI-a, profil matematică-informatică.....	10
Simularea Examenului de bacalaureat la matematică, clasa a XII-a, profil matematică-informatică.....	15
Simularea Examenului de bacalaureat la matematică, clasa a XII-a, filieră tehnologică.....	18
Simularea Examenului de bacalaureat la informatică	21
Între jocuri şi matematică.....	29
Informatica pe Internet.....	31
Bazar Matematica în filatelie (5).....	33
Profil: Dezmerean Robert.....	35
Informații utile.....	36

Matematica și Informatica la Colegiul Tehnic ”Alesandru Papiu Ilarian” Zalău

Prof. Matyas Mirel
C.T. ”Al.Papiu Ilarian” Zalău

Catedra de matematică și informatică a Colegiului Tehnic ”Alesandru Papiu Ilarian” Zalău a avut și în prima parte a anului școlar 2014-2015 o activitate bogată. În primul rând, ca în fiecare an școlar, activitatea competițională începe cu tradiționalul Concurs Interjudețean de Matematică ”Teodor Topan” de la Șimleu Silvaniei. Participăm în fiecare an cu un lot de elevi de la clasele de matematică-informatică, însă nivelul extrem de ridicat al subiectelor face ca rezultatele obținute de elevii noștri să fie modeste. Totuși, în acest an școlar, am reușit să obținem o binemeritată mențiune prin elevul Dezmerean Robert, pregătit de doamna profesoară Alexuțan Klara.

A urmat apoi etapa locală a Olimpiadei de Matematică și a Concursului de Matematică Aplicată ”Adolf Haimovici”. Elevii noștri au obținut rezultate bune, un număr de 25 de elevi calificându-se la etapa județeană (20 de la profilul tehnic și 25 de la profilul economic). La etapa județeană a Concursului de Matematică Aplicată ”Adolf Haimovici” am obținut următoarele rezultate:

- la clasa a XI-a tehnic: Baboș Sebastian (prof. Asztalos Lia) – Premiul I, Plotuna Daniel (prof. Sabou Manuela) – premiul II;
- la clasa a XII-a tehnic: Revnic Cosmin (prof. Alexuțan Klara) – Premiul II, Bucs Rudolf (prof. Sîrb Vasile) – Premiul III, Mureșan Horea (prof.Alexuțan Klara) și Iacob Andrei (prof. Sârb Vasile) – Mențiune;
- la clasa a IX-a servicii: Tarba Iulia (prof. Alexan Klara), Păcurar Roxana și Criste Cătălin (prof. Opriș Adonia) – Mențiune;
- la clasa a X-a servicii: Ardelean Florina (prof. Sîrb Vasile) – Premiul II;
- la clasa a XI-a servicii: Prodan Mihaela (prof. Alexuțan Klara) – Premiul III și Gecan Claudia (prof. Matyas Mirel) – Mențiune;
- la clasa a XII-a servicii: Copceac Raul și Derjan Patricia (prof. Matyas Mirel) – Mențiune.

La disciplina Informatică, rezultatele la etapa județeană a Olimpiadei de Informatică au fost: Barna David – clasa a IX-a (prof. Ionescu Ioana) – Mențiune, Dezmerean Robert (prof. Ionescu Ioana, prof.Mureșan Alexandru) – Premiul III.

Felicitări și succes la etapa națională!

Chestiuni metodice

Pentru a veni în întâmpinarea elevilor care se pregătesc pentru Examenul de Bacalaureat, revista MI API continu să publice o serie de articole cu conținut metodic. Materialul de față a fost prezentat de către doamna profesoară Alexuțan Klara la pedagogic desfășurat în școala noastră la data de data de 29 noiembrie 2013.

Tipuri de cerințe pentru Bacalaureat. Analiză matematică, clasa a XI-a

Prof. Alexuțan Klara
C.T. "Al.Papiu Ilarian" Zalău

M_tehnologic

1. Să se studieze continuitatea funcţiei f în punctul x_0
2. Să se determine parametrul real a astfel încât funcţia f să fie continuă în punctul x_0
3. Să se calculeze limita
4. Să se determine ecuaţia asimptotei
5. Să se calculeze $f^{'}(x)$
6. Să se calculeze $f^{'}(x_0)$
7. Să se calculeze limita $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_0}$
8. Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul $A(x_0, f(x_0))$
9. Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f
10. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei f
11. Să se arate că are loc inegalitatea
12. Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcţiei f
13. Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei $f^{'}$
14. Să se determine punctele de inflexiune ale funcţiei

M_mate-info

1. Să se arate că şirul este monoton
2. Să se arate că şirul este mărginit
3. Să se arate că şirul este convergent
4. Să se determine domeniul de derivabilitate al funcţiei f.
5. Să se arate ca funcţia f este injectivă

6. Să se arate ca funcţia *f* este surjectivă
7. Să se arate ca funcţia *f* este bijectivă
8. Să se arate ca funcţia *f* este inversabilă
9. Să se determine mulţimea valorilor funcţiei *f*
10. Diverse ecuaţii
11. Diverse inegalităţi

Exemple

1.Se consideră funcţia $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

a) Să se determine ecuaţia asimptotei oblice către ∞ la graficul funcţiei *f*.
b) Să se verifice dacă $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}, \forall x > 0$.
c) Să se arate că *f* este convexă pe $(0, \infty)$.
d) Să se determine ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei *f*.
e) Să se calculeze $f'(2)$.
f) Să se calculeze limita $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$.
g) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul $A(1, f(1))$.
h) Să se determine intervalele de monotonie.
i) Să se determine numărul punctelor de extrem.
j) Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2013}\right) < f\left(\sqrt[3]{2014}\right)$.
k) Să se determine mulţimea valorilor funcţiei *f*.
l) Să se determine numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei. $f(x) = m, m \in \mathbb{R}$.

Rezolvare

a) Ecuaţia asimptotei oblice este de forma $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Ecuaţia asimptotei oblice spre spre $+\infty$ este *y=x*.

b) $f'(x) = \frac{2x\cdot x-(x^2+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}, \forall x > 0.$
c) $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0, \forall x > 0 \Longrightarrow$*f* convexă pe $(0, \infty)$.
d) $f(0+0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \infty \Longrightarrow x = 0$ asimptotă verticală la stânga.
e) $f'(2) = \frac{3}{4}$.
f) $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3) = \frac{8}{9}$.
g) Ecuaţia tangentei este: $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Longrightarrow y - 2 = 0$.

h) $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$; -1 nu convine

x	0		1		∞
$f'(x)$	----------0+++++++++++++++++++				
$f(x)$	∞	↘	2	↗	∞

Pe $(0,1)$ f s. descrescătoare iar pe $(1,\infty)$ f s. crescătoare

i) Un punct de extrem, x=1 punct de minim

j) $\left.\begin{array}{l} \sqrt[3]{2013} < \sqrt[3]{2014} \\ \sqrt[3]{2013}, \sqrt[3]{2014} \in (1,\infty) \\ pe\ (1,\infty) fs. crescătoare \end{array}\right\} \Longrightarrow f\left(\sqrt[3]{2013}\right) < f\left(\sqrt[3]{2014}\right).$

k) $Imf = (2,\infty)$

l) $m \in (-\infty, 2) \Longrightarrow ec. nu\ are\ soluţii\ reale$

$m \in (2,\infty) \Longrightarrow ec. are\ două\ soluţii\ reale\ x_1 \in (0,1), x_2 \in (1,\infty).$

$m = 2 \Longrightarrow$ ec. are soluţia x=1

2.Se consideră funcţia $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} - lnx.$

a) Arătaţi că $\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = 0.$

b) Demonstraţi că f este crescătoare pe intervalul $(4,+\infty)$.

c) Determinaţi ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei f.

(Bacalaureat 2012 M_tehnologic iunie-iulie)

Rezolvare

a) $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' - (lnx)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}, x \in (0,\infty)$

$\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = f'(4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$

b) $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' - (lnx)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-2}{2x}$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow \sqrt{x} - 2 = 0 \Longrightarrow x = 4$

x	0		4		∞
$f'(x)$	----------0+++++++++++++++++++++++++				
$f(x)$		↘	f(4)	↗	

$\Longrightarrow f$ este crescătoare pe $(4,+\infty)$.

c) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\sqrt{x} - lnx\right) = \infty \Longrightarrow x = 0$ este ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei *f*.

1. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-x-1}{x+1}$.

a) Calculaţi $f^{'}(x), x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

b) Calculaţi $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)\cdot lnx}{x^2-x-1}$.

c) Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei *f*.

(Bacalaureat 2012 M_tehnologic august)

Rezolvare

a)$f^{'}(x) = \frac{(2x-1)(x+1)-\left(x^2-x-1\right)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

b)$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)\cdot lnx}{x^2-x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{lnx}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$(l'Hospital)

c)Ecuaţia asimptotei oblice este de forma $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x} = 1.$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-2x - 1}{x + 1}\right) = -2$$

Ecuaţia asimptotei oblice spre spre $+\infty$ este *y=x-2*.

4.Se consideră funcţia $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} - 1$.

a) Arătaţi că $2\sqrt{x}f^{'}(x) = 1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

b) Verificaţi dacă dreapta de ecuaţie $y = \frac{1}{4}x$ este tangent la graficul funcţiei *f* în punctul de abscisă $x_0 = 4$, situat pe graficul funcţiei *f*.

c) Arătaţi că funcţia *f* este concavă pe intervalul $(0, +\infty)$.

(Bacalaureat 2013 M_tehnologic iunie-iulie)

Rezolvare

a) $f^{'}(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{'} - 1^{'} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x \in (0, \infty)$

$2\sqrt{x}f^{'}(x) = 2\sqrt{x}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 1, x \in (0, \infty)$

b) $y - f(4) = f^{'}(4)(x - 4);\ f(4) = 1, f^{'}(4) = \frac{1}{4}$

Ecuaţia tangentei este $y = \frac{1}{4}x$.

c) $f^{''}(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0, \forall x \in (0, \infty) \Longrightarrow$ f concavă pe $(0, \infty)$

5. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x + 2)^3$.

a) Verificaţi dacă $f^{'}(x) = 3x^2 + 12x + 12$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
b) Arătaţi că funcţia f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
c) Calculaţi $\lim_{x\to\infty} \frac{f^{'}(x)}{x^2}$.

(Bacalaureat 2013 M_tehnologic august)

Rezolvare

a) $f^{'}(x) = (x^3 + 6x^2 + 12x + 8)^{'} = 3x^2 + 12x + 12, x \in \mathbb{R}$.

b) $f^{'}(x) = 3(x + 2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+12x+12}{x^2} = 3$.

6.Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 12x$.

a) Arătaţi că funcţia este crescătoare pe intervalul $[2, +\infty)$.
b) Calculaţi $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{f(x)}$
c) Determinaţi mulţimea numerelor reale *a* pentru care ecuaţia *f(x)=a* are trei soluţii reale distincte.

(Bacalaureat 2012 M_mate-info iulie)

Rezolvare

a) $f^{'}(x) = 3x^2 - 12, x \in \mathbb{R}$

$f^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$.

Obţinem tabelul de variaţie:

x	-∞		-2		2		+∞
$f'(x)$		+++++++++++	0	----------	0	+++++++++++	
f(x)	-∞	↗	16	↘	−16	↗	+∞

Din tabel rezultă că f este strict crescătoare pe $[2, \infty)$.

b) Aplicăm de trei ori regula lui l'Hospital şi obţinem:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{f(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{3x^2-12} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{6x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{6} = \infty.$$

c) Şirul lui Rolle pentru funcţia $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - a$ este $-\infty, 16-a, -16-a, \infty$

Ecuaţia are trei soluţii reale distincte dacă şi numai dacă a$\in (-16, 16)$.

7.Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty), f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

a) Calculaţi $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}$.
b) Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei *f*.
c) Demonstraţi că, pentru.orice număr real *m>0*, ecuaţia *f(x)=m* are soluţie unică în $\mathbb{R}$.

(Bacalaureat 2012 M_mate-info august)

Rezolvare

a) $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 1$
b) Ecuaţia asimptotei oblice este de forma $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x} = 2.$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - 2x) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}} = 0$$

Ecuaţia asimptotei oblice spre spre $+\infty$ este $y=2x$.

c) f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+1}) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-1}{x-\sqrt{x^2+1}} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Rightarrow Imf = (0,\infty) \Longrightarrow$$

f este surjectivă. (1)

Din a) $\Longrightarrow f'(x) = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} > 0,\ \forall\, x\in\mathbb{R} \Longrightarrow$ f este strict monotonă pe $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$f este injectivă. (2)

Din (1) şi (2) $\Longrightarrow$ f este bijectivă $\Longrightarrow$ ecuaţia $f(x)=m$ are soluţie unică în $\mathbb{R}, \forall m > 0$.

8.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = cosx + \frac{x^2}{2}$.

a) Calculaţi $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 0$, situat pe graficul funcţiei f.

c) Demonstraţi că $f(x)\geq 1$, pentru orice , $x\in\mathbb{R}$.

(Bacalaureat 2013 M_mate-info iunie-iulie)

Rezolvare

a) $f'(x) = \left(cosx + \frac{x^2}{2}\right)' = -sinx + x, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) $y - f(0) = f'(0)(x-0)$

$$f(0) = 1, f'(0) = 0 \Longrightarrow$$

Ecuaţia tangentei este $y = 1$.

c) $f''(x) = -cosx + 1 \geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Longrightarrow f'$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$

$f'(x)\leq 0, \forall x\in(-\infty,0]$ şi $f'(x)\geq 0, \forall x\in[0,\infty) \Longrightarrow 0$ punct de minim

$$f(x)\geq f(0) = 1, \forall x\in\ \mathbb{R}$$

9.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x+e^x}$.

a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(x+e^x)^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

b) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Demonstraţi că $f(x)\geq\frac{e}{e+1}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

(Bacalaureat 2013 M_mate-info august)

Rezolvare

a) $f'(x) = \frac{e^x(x+e^x)-e^x(1+e^x)}{(x+e^x)^2} = \frac{(x-1)e^x}{(x+e^x)^2}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x+e^x} =$

$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$(regula lui l'Hospital) $\Longrightarrow$ecuaţia asimptotei orizontale spre ∞ la graficul funcţiei *f* este *y*=1.

c) $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	----------		0	++++++++++++++++++	
f(x)		↘	f(1)	↗	

$$f(x) \geq f(1) = \frac{e}{e+1}, \text{ pentru orice } x \in (0, +\infty).$$

Bibliografie:

1. Szilard, Andras, Bălună, Mihai,…Bacalaureat 2012: M2 matematică: ghid de pregătire pentru examen, Editura GIL, Zalău, 2011
2. Bălună, Mihai, Panaitopol, Maria Elena…Bacalaureat 2012: M2 matematică: ghid de pregătire pentru examen, Editura GIL, Zalău, 2011
3. ***, Manuale de matematică, clasele IX-XII.
4. Catană, A.; Săcuiu, M.; Stănăşilă, O.: Metodica predării analizei matematice. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

Examene. Concursuri

1. Simularea Examenului de Bacalaureat la matematică

Chiar dacă elevii nu acordă importanţă simulării examenului de bacalaureat ce se desfăşoară în fiecare an în luna martie, considerăm util să prezentăm câteva dintre subiectele propuse, insistând mai ales pe modul de rezolvare a acestora.

În acest număr al revistei, vă prezentăm trei dintre subiectele date în sesiunea din martie 2015 a simulării examenului de bacalaureat: subiectul de matematică pentru clasa a XI-a (profil matematică-informatică), subiectele de matematică pentru clasa a XII-a (atât pentru M1 cât şi pentru M2) şi subiectul de informatică.

Sperăm că aceste modele de rezolvare vor fi utile elevilor care se pregătesc pentru Examenul de Bacalaureat.

A. Simularea Examenului de Bacalaureat la matematică. Filieră teoretică. Profil matematică informatică. Clasa a XI-a

prof. Loredana Gavriş
C.T. "Al. Papiu Ilarian" Zalău

Subiectul I (30 puncte)

1. Determinaţi numărul real x pentru care numerele $5, 2x+3, 2x+7$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2. Arătaţi că, pentru orice număr real m, graficul funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + (m-1)x - m$ intersectează axa Ox.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2-x} = 2x - 1$.
4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $\{1,2,3,4,5\}$, acesta să verifice relaţia $5^{n-1} > (n+1)!$.
5. Determinaţi numerele reale a şi b , stiind că , în reperul cartezian xOy , punctul de intersecţie a dreptelor $x + (2a+1)y - 4 = 0$ şi $3x + by - 8 = 0$ este $M\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
6. Arătaţi că $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = tgx$ pentru orice număr real $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II (30 puncte)

1. Se consideră determinantul $(x,y)=\begin{vmatrix}1 & x & \frac{1}{x}\\ 1 & y & \frac{1}{y}\\ 1 & \frac{1}{2} & 2\end{vmatrix}$, unde x şi y sunt numere reale nenule.
   a) Arătaţi că $\left(2,\frac{1}{2}\right)=0$.
   b) Arătaţi că $D(x,y)=-\frac{1}{2}(2x-1)(2y-1)(x-y)$, pentru orice numere reale nenule x şi y .
   c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D(\log_2 x,2)=0$.
2. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $(a)=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ a & 1 & 2\\ 2 & a & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
   a) Arătaţi că $2A(1)-A(-1)=A(3)$.
   b) Determinaţi numerele reale a şi b pentru care $A(a)+b\,I_3=2(A(1)-I_3)(A(1)-I_3)$.
   c) Arătaţi că matricea $A(n)$ este inversabilă pentru orice număr natural n

Subiectul III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\frac{x+1}{x}$ şi şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$.
   a) Determinaţi ecuaţia aşimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul functiei f
   b) Arătaţi ca şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescator
   c) Calculati $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)(a_n-\ln n)$
2. Se conşidera funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} f(x)=\begin{cases}2x+a+1, x\leq 1\\ x^2+a^2x,\ \ x>1\end{cases}$, unde a este număr real.
   a) Determinaţi numerele reale a pentru care funcţia f este continuă în $x=1$
   b) Pentru $a=2$ calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x)+x}\right)$
   c) Pentru $a=-1$, arătaţi că ecuaţia $f(x)+2^x=0$ are cel puţin o soluţie în intervalul $[-1,0]$.

Rezolvări:

Subiectul I

1. Stiind că numerele sunt consecutive şi în progreşie aritmetică utilizăm relaţia $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$. Atunci obţinem:

   $(2x+3) = \dfrac{5+(2x+7)}{2} \Rightarrow 2(2x+3) = 5+(2x+7) \Rightarrow$

   $4x - 2x = 12 - 6 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

2. Graficul unei funcţii de gradul II intersectează axa *Ox* $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

   $\Rightarrow \Delta = (m-1)^2 + 4m = (m-1)^2 \geq 0$

   $\Rightarrow$pentru orice număr real *m* , graficul funcţiei *f*, intersectează axa Ox

3. Se ridică la pătrat relaţia dată în problemă şi se obţine

$2 - x = (2x-1)^2 \quad \Leftrightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0.$

Relaţia obţinută este o ecuaţie de gradul II a cărei rădăcini sunt

$x_1 = -\frac{1}{4}$,care nu verifică ecuaţia dată, şi $x_2 = 1$, care verifică ecuaţia dată

4. Elementele mulţimii $\{1,2,3,4,5\}$,care verifică relaţia $5^{n-1} > (n+1)!$ sunt 3 şi 4 , deci sunt 2 cazuri favorabile. Mulţimea $\{1,2,3,4,5\}$ are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile

$$p = \frac{nr.cazuri\ favorabile}{nr.cazuri\ posibile} = \frac{2}{5}$$

5. Deoarece *M(a,-2)* este punctul de intersecţie dintre cele două drepte atunci verifică cele două ecuaţii, adică obţinem:

$$a + (2a+1)\cdot(-2) - 4 = 0 \Leftrightarrow a = -2$$
$$3\cdot a + b \cdot(-2) - 8 = 0 \Leftrightarrow b = -7$$

6. Folosind formulele trigonometrice

$\sin 2x = 2sinxcosx$ şi $1 + \cos 2x = 2cos^2\ x$

pe care le înlocuim în relaţia dată, obţinem

$$\frac{2sinxcox}{2cos^2x} = \frac{\sin x}{\cos x} = tgx$$

Subiectul II

1.

a) $D\left(2, \frac{1}{2}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = 0$, deoarece determinantul are două linii egale.

b) Pentru calcularea mai uşoara a determinantului păstrăm L_3 şi folosim L_1-L_3 şi L_2-L_3

$$D(x,y)=\begin{vmatrix}0 & x-\frac{1}{2} & \frac{1}{x}-2\\ 0 & y-\frac{1}{2} & \frac{1}{y}-2\\ 1 & \frac{1}{2} & 2\end{vmatrix}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{y}-2\right)-\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-2\right)$$

$$\Rightarrow D(x,y)=-\frac{1}{2xy}(2x-1)(2y-1)(x-y)$$

c) Folosind determinantul sub forma stabilită la punctul b), obţinem

$(2\log_2 x-1)(2\cdot 2-1)(\log_2 x-2)=0$

Atunci $(2\log_2 x-1)=0\ \ sau\ \ (\log_2 x-2)=0$

$(2\log_2 x-1)=0\ \Rightarrow \log_2 x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=2^{\frac{1}{2}}\Rightarrow x=\sqrt{2}$

sau

$(\log_2 x-2)=0\Rightarrow \log_2 x=2\Rightarrow \mathrm{x}=4$

$S=\{\sqrt{2},4\}$

2.

a) $A(1)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $A(-1)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$ $A(3)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$

$2A(1)-A(-1)=\begin{pmatrix}2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 4\\ 4 & 2 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=$

$A(3)$

b) $A(a)+bI_3=\begin{pmatrix}1+b & 2 & a\\ a & 1+b & 2\\ 2 & a & 1+b\end{pmatrix}$, $A(1)-I_3=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$,

$$2\cdot(A(1)-I_3)(A(1)-I_3)=2\cdot\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=2\cdot\begin{pmatrix}4 & 1 & 4\\ 4 & 4 & 1\\ 1 & 4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 2 & 8\\ 8 & 8 & 2\\ 2 & 8 & 8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1+b & 2 & a\\ a & 1+b & 2\\ 2 & a & 1+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 2 & 8\\ 8 & 8 & 2\\ 2 & 8 & 8\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=8, b=7$$

c) Matricea A este inversabilă dacă $\det(A(n))\neq 0$

$$\det(A(n))=\begin{vmatrix}1 & 2 & n\\ n & 1 & 2\\ 2 & n & 1\end{vmatrix}=(n+3)(n^2-3n+3)$$

Ecuaţia $det\big(A(n)\big) = 0$ nu are soluţii în mulţimea numerelor naturale, deci matricea $A(n)$ este inversabilă pentru orice număr natural n.

Subiectul III

1.a) $\lim_{n\to\infty} \ln\frac{x+1}{x} = 0$. Dreapta de ecuaţie y=0 este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei *f*.

b) $a_{n+1} - a_n = f(n+1) = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > 0$,pentru orice număr natural nenul *n* , deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător

c) $a_n = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1)$

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)(\ln(n+1) - \ln n) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{2n+1}{n}} = \ln e^2 = 2$$

2.a) f este continuă în $x = 1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = f(1) \Rightarrow a + 3 = 1 + a^2$

$\Leftrightarrow\ a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = -1\ \ si\ a_2 = 2$

b)

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x} - \sqrt{x^2+5x}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2+4x-x^2-5x}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+5x}} =$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+5x}} = -\frac{1}{2}$

c) Considerăm funcţia $g(x)$: $[-1,0] \to \mathbb{R},\ g(x) = f(x) + 2^x = 2x + 2^x$

Deoarece:

$$\left.\begin{array}{c} g \text{ este continuă pe } [-1,0] \\ g(-1) = -\frac{3}{2} < 0 \\ g(0) = 1 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ecuaţia } f(x) + 2^x = 0 \text{ are cel puţin o soluţie în intervalul } [-1,0]$$

B. Simularea Examenului de Bacalaureat la matematică.
Filieră teoretică. Profil matematică informatică. Clasa a XII-a

Prof. Klára Alexuţan
C.T. "Al. Papiu Ilarian" Zalău

Subiectul I

1. Calculaţi partea reală a numărului complex $z = \frac{3+2i}{2-3i}$.

2. Determinaţi numărul real a, ştiind că funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x - a$ are graficul tangent axei *Ox*.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x} + 3 \cdot 4^x - 16 = 0$.

4. Calculaţi probabilitatea ca alegând una dintre submulţimile cu două elemente ale mulţimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, aceasta să aibă un singur element număr par.

5. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele M*(2,3)* şi *N(4,1)*.Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului MN..

6. Arătaţi că $(sinx + \sin(\pi - x))^2 + (cosx + \cos(2\pi - x))^2 = 4$, pentru orice număr real *x*.

Rezolvare

1. z=$\frac{(2+3i)(3+2i)}{4+9} = \frac{13i}{13} = i \Longrightarrow$ partea a numărului *z* este 0.

2. $\Delta = 1 + 4a$. Graficul este tangent axei *Ox* $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$

3. $4^x + 3 \cdot 4^x - 16 = 0 \Longrightarrow 4 \cdot 4^x = 16 \Longrightarrow x = 1$.

4. Sunt $C_3^1 \cdot C_4^1 = 12$ cazuri favorabile. Sunt $C_7^2 = 21$ cazuri posibile

$$P = \frac{nr.cazuri\ favorabile}{nr.total\ cazuri} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}.$$

5. $m_{MN} = -1, d \perp MN \Longrightarrow m_d = 1$, unde d este mediatoarea segmentului *MN*. Fie P(3,2) mijlocul segmentului *MN*

d: $y - y_0 = m_d(x - x_0)$

d: $y = x - 1$

6. $\sin(\pi - x) = sinx, \cos(2\pi - x) = cosx$

$(2sinx)^2 + (2cosx)^2 = 4(sin^2x + cos^2x) = 4$, pentru orice număr real *x*.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, unde x este un număr real.

a) Arătaţi că $A(1) + A(-1) = 2A(0)$.

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $det(A(x) + I_3) = 0$.

c) Arătaţi că $det(aI_3 - bA(-1) + cA(-1) \cdot A(-1)) \geq 0$, pentru orice numere reale positive a,b şi c.

2. Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie asociativă şi cu element neutru $x * y = xy - 5x - 5y + 30$.

a) Arătaţi că $x * y = (x - 5)(y - 5) + 5$, pentru orice numere întregi x şi y.

b) Determinaţi elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziţie "$*$".

c) Calculaţi $d_1 * d_2 * \ldots * d_8$, unde $d_1, d_2, \ldots, d_8$ sunt divizorii naturali ai lui 2015.

Rezolvare

1.a) $A(1) + A(-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 2A(0)$.

b) $A(x) + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A(x) + I_3) = 1 + x$

$$1 + x = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

c) $aI_3 - bA(-1) + cA(-1) \cdot A(-1) =$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b \\ -b & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

$$\det\big(aI_3 - bA(-1) + cA(-1) \cdot A(-1)\big) = \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} =$$

$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = \frac{1}{2}(a + b + c)((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2) \geq 0$, pentru orice numere reale pozitive a,b şi c.

2.a) $x * y = xy - 5x - 5y + 25 + 5 = x(y - 5) - 5(y - 5) + 5 = (x - 5)(y - 5) + 5$, pentru orice numere întregi x şi y.

b) $\exists e \in \mathbb{Z}, x * e = e * x = x,$, pentru orice număr întreg $x \Longrightarrow e = 6$
Fie $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $\exists x' \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x * x' = x' * x = 6 \Longrightarrow x' = 5 + \frac{1}{x-5}$. $x' \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x - 5 \,/\, 1$ obţinem x=4 sau x=6
c) Observăm că $x * 5 = 5,\ 5 * y = 5$ pentru orice numere întregi *x* şi *y*.
5 este divizor al lui 2015. 2015 are opt divizori naturali şi legea este asociativă, avem $d_1 * d_2 * ... * d_8 = 5$

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcţia $f: (-1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x - \ln(x+1)$.
a) Calculaţi $f'(x), x \in (-1, +\infty)$.
b) Calculaţi $\lim_{x\to\infty} \frac{x - f(x) - ln2}{x-1}$.
b) Demonstraţi că $\ln(x+1) \leq x$, pentru orice $x \in (-1, \infty)$.

2.Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

a) Calculaţi $\int_0^1 f(x)dx$.
b) Arătaţi că $\int_0^1 \frac{f(x)+x^2 f(x)}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{8}$.
c) Calculaţi $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t)dt$.

Rezolvare

1.a) $f'(x) = x' - (\ln(x+1))' = 1 - \frac{1}{x+1}, x \in (-1, \infty)$
b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x - f(x) - ln2}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1) - ln2}{x-1} = \frac{1}{2}$
c) $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$
$f'(x) \leq 0, \forall x \in (-1,0)$ şi $f'(x) \geq 0, , \forall x \in (0, \infty) \Longrightarrow x = 0$ punct de minim $\Longrightarrow f(x) \geq f(0) \Longrightarrow \ln(x+1) \leq x$, pentru orice $x \in (-1, \infty)$.
2.a) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}.dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} ln2$
b) $\int_0^1 \frac{f(x)+x^2 f(x)}{x^4+1} dx = \int_0^1 \frac{x}{x^4+1} dx = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}$
c) Aplicăm regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$. $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t)dt = \lim_{x\to 1}\left(\int_1^x f(t)dt\right)' = \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$

C. Simularea Examenului de Bacalaureat la matematică.
Filieră tehnologică. Toate specializările. Clasa a XII-a

prof. Asztalos Lia
C.T. "Al. Papiu Ilarian" Zalău

Subiectul I (30de puncte)

1. Calculaţi suma primilor trei termini ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_1=1$ şi $a_3=5$.

2. Determinati abscisele punctelor de intersecţie a graficelor funcţiilor, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x$ şi $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=2x-2$.

3 . Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2-x}=\frac{1}{9}$

4. Dupa o ieftinire cu 15%, preţul unui obiect este de 34 lei. Calculaţi preţul obiectului înainte de ieftinire.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(1,4), B(-3,2) şi C(5,2). Calculaţi lungimea medianei din vârful A al triunghiului ABC.

6. Arătaţi că $\mathrm{tg}30^\circ\mathrm{ctg}60^\circ+\mathrm{tg}60^\circ\mathrm{ctg}30^\circ=\frac{10}{3}$

Subiectul II (30de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a)Calculaţi det A.

b)Determinaţi numarul real x, ştiind că A ·A= xA.

c)Determinaţi numerele reale a pentru care det(A+aI_2)=0.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă x*y=xy+2x+2y+2.

a) Arătaţi că x*y=(x+2)(y+2)-2, pentru orice numere reale x şi y.

b)Calculaţi (-2015)*(-2)*0*2*2015.

c)Determinaţi numerele naturale n, ştiind că numărul n*(-n) este natural.

Subiectul III (30de puncte)

1.Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$.

a) Calculaţi $f'(x)$, $x\in(-2,+\infty)$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x =0 , situate pe graficul funcţiei f.

c) Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F=x^2-x+1$.

a) Calculați $\int_0^1 (f(x)+1)dx$.

b)Arătați că funcția F este o primitive a funcției f.

c)Determinați numărul nenul n,știind că $\int_0^n F(x)dx=\frac{n^3}{3}$

Barem de corectare

Subiectul I

1	$a_2=3$ avem $a_1+a_2+a_3=1+3+5=9$	5p
2	$x^2-x=2x-2$, $x^2-3x+2=0$ $x_1=1$ și $x_2=2$	3p 2p
3	$3^{2-x}=3^{-2} \Longrightarrow 2-x=-2 \Longrightarrow x=4$	5p
4	$p-15\%\cdot p=34$, unde p este prețul obiectului înainte de ieftinire iar $p=40$ de lei	3p 2p
5	$x_M=1, y_M=2$, unde punctul M este mijlocul laturii BC deci AM=2	3p 2p
6	$\operatorname{tg}30°\operatorname{ctg}60°+\operatorname{tg}60°\operatorname{ctg}30=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{3}+=\frac{10}{3}$	3p 2p

Subiectul II

1.a)	det A=$\begin{vmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{vmatrix}$=3·2-6·1=0	5p
b)	A·A=$\begin{pmatrix}15 & 30\\ 5 & 10\end{pmatrix}$=5$\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$=5A , de unde obținem x=5	5p
c)	det(A+aI_2)=$\begin{vmatrix}3+a & 6\\ 1 & 2+a\end{vmatrix}$=(3+a)(2+a)$-$6=$a^2$+5a a^2+5a=0 $\Leftrightarrow$ a_1=-5 si a_2=0	2p 3p
2.a)	x*y=xy+2x+2y+4$-$2=x(y+2)+2(y+2)$-$2= =(x+2)(y+2)$-$2, pentru orice numere reale x si y	2p 3p
b)	x*($-$2)=-2 si (-2)*y=-2 ,pentru x si y numere reale (-2015)*(-2)*0*2*2015 = -2	3p 2p
c)	n*(-n)=(n+2)(-n+2)-2=2-n^2 unde 2-$n^2\epsilon\mathbb{N}\Longrightarrow n_1$=0 si n_2=1	5p

Subiectul III

1.a)	$f'(x) = \frac{1\cdot(x+2)-(x-2)\cdot 1}{(x+2)^2} =$ $= \frac{4}{(x+2)^2}, \quad x\epsilon(-2;+\infty)$	3p 2p
b)	$f(0) = -1$, $f'(0) = 1$ Ecuatia tangentei este y-$f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow$ $y = x - 1$	3p 2p
c)	$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x+2} = 1$. Dreapta y=1 este asimptota spre +∞ la graficul functiei f	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 (f(x)+1 = dx = \int_0^1 2xdx = x^2\|_0^1 = 1-0 = 1$	2p 3p
b)	$F'(x)=(x^2-x+1)=2x-1=f(x)$, pentru orice numar real x, deci F este o primitiva a functiei f	3p 2p
c)	$\int_0^n F(x)dx = \int_0^n (x^2-x+1)d = \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\Big\|_0^n$ $= \frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+n$ $deci \quad \frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+n = \frac{n^3}{3} \Longrightarrow n^2-2n = 0$ $şi$ $cum\ n\ este\ numar\ natural\ nenul, obtinem\ n = 2$	2p 3p

D. Simularea Examenului de Bacalaureat la informatică.

Prof. Ionescu Ioana
C.T. "Al Papiu Ilarian" Zalău

SUBIECTUL I 30(puncte)

1. Indicaţi expresia Pascal care are valoarea true dacă şi numai dacă cifra zecilor numărului natural memorat în variabila întreagă n este 2 sau 7: **(4p.)**

a. ((n div 10) mod 10=2) or ((n div 10) mod 10=7)
b. ((n div 10) mod 10=2)and ((n div 10) mod 10=7)
c. ((n mod 10) div 10=2) or ((n mod 10) div 10=7)
d. ((n mod 10) div 10=2) and ((n mod 10) div 10=7)

2. Se consideră algoritmul alăturat, reprezentat în pseudocod.
S-a notat cu **`x%y`** restul împărţirii numărului natural **`x`** la numărul natural nenul **`y`** şi cu **`[z]`** partea întreagă a numărului real **`z`**.

```
citeşte n,k
    (numere naturale strict mai mari decât 1)
┌cât timp n ≥ 1  execută
│ p←0
│ m←n
│ ┌cât timp m%k=0 execută
│ │ p←p+1
│ │ m←[m/k]
│ └■
│ ┌dacă m=1 atunci
│ │ scrie n,' ', p , ' '
│ └■
│ n←n-1
└■
scrie n
```

a) Scrieţi valorile afişate dacă se citesc, în această ordine, numerele **17** şi **4.** **(6p.)**
b) Dacă pentru variabila k se citeşte valoarea 50, scrieţi cel mai mic şi cel mai mare număr de două cifre care pot fi citite pentru n astfel încât, pentru fiecare dintre acestea, numerele afişate în urma executării algoritmului să fie 1 0. **(4p.)**

c) Scrieţi în pseudocod un algoritm, echivalent cu cel dat, în care să se înlocuiască prima structură **cât timp...execută** cu o structură repetitivă cu test final. **(6p.)**

d) **Scrieţi programul Pascal corespunzător algoritmului dat. (10p.)**

SUBIECTUL II 30(puncte)

1. Variabila A, declarată alăturat, memorează lungimile celor două catete ale unui triunghi dreptunghic. Indicaţi expresia Pascal care are ca valoare pătratul lungimii ipotenuzei acestui triunghi. **(4p.)**

```
type TD=record
        x,y:real;
    end;
var A:TD;
```

a. A(x)*A(x)+A(y)*A(y)
b. A.x*a.x+A.y*A.y
c. TD(A).x*TD(A).x+TD(A).y*TD(A).y
d. TD.x*TD.x+TD.y*TD.y

2. În figura alăturată este reprezentat un graf orientat cu trei vârfuri. O matrice de adiacenţă prin care poate fi reprezentat acesta este **(4p.)**

a.	b.	c.	d.
0 1 0	0 1 0	0 0 0	0 0 0
0 0 1	0 0 0	0 0 0	0 1 0
0 0 0	0 1 0	1 1 0	1 0 0

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare dintre cerinţele următoare.

3. Un arbore cu 10 noduri, numerotate de la 1 la 10, este reprezentat prin vectorul de „taţi” (9,7,10,7,2,2,0,4,10,4). Enumeraţi trei noduri ale arborelui care au exact doi fii. **(6p.)**

4. În secvenţa alăturată, variabila i este de tip întreg, iar variabila s memorează un şir de cel mult 20 de caractere numai litere mici ale alfabetului englez.

```
i:=1;
while I<=length(s) do
begin …….. end;
```

Scrieţi instrucţiunile care pot înlocui punctele de suspensie astfel încât, în urma executării secvenţei obţinute, să se afişeze pe ecran toate literele şirului memorat în variabila s, cu excepţia grupului de litere ae. Literele se afişează în ordinea apariţiei lor în şir.

Exemplu: dacă şirul memorat în variabila s este
elaeagnaceae
se afişează pe ecran
elagnace **(6p.)**

5. Scrieţi un program Pascal care citeşte de la tastatură două numere naturale, m şi n, din intervalul [2,50] şi construieşte în memorie un tablou bidimensional cu m linii şi n coloane, astfel încât prima coloană conţine primele m numere naturale impare, în ordine strict crescătoare, şi parcurgând orice linie a tabloului, de la stânga la dreapta, se obţin numere naturale consecutive, în ordine strict crescătoare. Programul afişează pe ecran tabloul obţinut, fiecare linie a tabloului pe câte o linie a ecranului, elementele de pe aceeaşi linie fiind separate prin câte un spaţiu.
(10p.)

Exemplu: pentru m=4, n=5 se obţine tabloul alăturat.

1	2	3	4	5
3	4	5	6	7
5	6	7	8	9
7	8	9	10	11

SUBIECTUL III 30(puncte)

1. Utilizând metoda backtracking, se generează toate aranjamentele florale de câte 5 flori distincte din mulţimea {frezie, iris, lalea, mac, nard}. Două aranjamente sunt distincte dacă florile sunt dispuse în altă ordine.Primele patru soluţii obţinute sunt, în această ordine: (frezie, iris, lalea, mac, nard), (frezie, iris, lalea, nard, mac), (frezie, iris, mac, lalea, nard), (frezie, iris, mac, nard, lalea). A cincea soluţie generată este:
(4p.)

a. (frezie, iris, nard, lalea, mac)
b. (frezie, iris, nard, mac, lalea)
c. (frezie, lalea, iris, mac, nard)
d. (frezie, lalea, iris, nard,mac)

2. Subprogramul f este definit alăturat. Scrieți ce valori au f(105,105) respecti f(105,42). **(6p.)**

```
function f(x,y:integer):integer;
begin
  if x=y then f:=1
         else begin
                  if x<y then
                    begin
                      x:=x+y;
                      y:=x-y;
                      x:=x-y;
                    end;
                  f:=1+f(x-y,y);
                end;
end;
```

3. Subprogramul Cifre are un singur parametru n, prin care primește un număr natural (n $[0,10^9]$). Subprogramul afișează pe ecran toate cifrele distincte care apar în scrierea lui n, separate prin câte un spațiu.
Scrieţi definiţia completă a subprogramului.
Exemplu: dacă n=24207, se afișează cifrele 0 2 4 7, nu neapărat în această ordine. **(10p.)**

4. Fișierul bac.txt conține numere naturale din intervalul [1,104]: pe prima linie numărul n, pe a doua linie un șir de n numere ordonate strict descrescător, iar pe a treia linie două numere, x și y (x y). Numerele de pe aceeași linie sunt separate prin câte un spațiu.
Se cere să se afișeze pe ecran cel mai mare număr din șir care aparține intervalului [x,y]. Dacă nu există un astfel de număr, se afișează pe ecran mesajul nu exista. Pentru determinarea numărului cerut se utilizează un algoritm eficient din punctul de vedere al timpului de executare.
Exemplu: dacă fișierul conține numerele
5
100 49 16 7 2
10 30
atunci pe ecran se afișează: 16
a) Descrieți în limbaj natural algoritmul utilizat, justificând eficiența acestuia. **(4p.)**

b) Scrieți programul Pascal corespunzător algoritmului descris. **(6p.)**

Rezolvare

Subiectul I

1. **Răspuns corect:** a
2.
   a) **Răspuns corect:** 16 2 4 1 1 0 (algoritmul afișează perechi de câte 2 numere x si p unde $x \in [1, n]$ și $x = k^p$)

   b) **Răspuns corect:** 10, 49

   c)
```
citeşte n,k
      (numere naturale strict mai mari decât 1)
┌cât timp n≥1 execută
│p←0
│m←n
│ ┌dacă m%k=0 atunci
│ │ ┌repetă
│ │ │ p←p+1
│ │ │ m←[m/k]
│ │ └până când m%k<>0
│ └■
│ ┌dacă m=1atunci
│ │ scrie n,’  ’, p, ‘ ‘
│ └■
│ n←n-1
└■
```

   d)
```
var n,m,k,p:word;
begin
    write(’n=’); readln(n);
    write(’k=’); readln(k);
    while n>=1 do
            begin
                    p:=0;
                    m:=n;
                    while m mod k =0 do
                            begin
                                    p:=p+1;
```

```
                                        m:=m div k;
                                    end;
                                if m mod k=0 then
                                    write(n,’  ’,p,’  ’ );
                                n:=n-1;
                        end;
                readln;
        end.
```

Subiectul II

1. **Răspuns corect: b**. A.x*A.x+A.y*A.y
2. **Răspuns corect: c**. 0 0 0
   0 0 0
   1 1 0
3. **Răspuns corect:** Oricare 3 noduri dintre nodurile 2, 4, 7, 10
4. **Răspuns corect:**
   if (s[i]=’a’) and (s[i+1]=’e’) then i:=i+2
   else write(s[i]);
5.
```
var a:array[1..50,1..50] of integer;
    m,n,i,j:byte;
begin
        write(’m=’); readln(m);
        write(’n=’); readln(n);
        for i:=1 to n do
                a[1,i]:=i;
        for i:=2 to m do
          for j:=1 to n do
                begin
                        a[i,j]:=a[i-1,j]+2
                end;
        for i:=1 to m do
                begin
                  for j:=1 to n do
                        write(a[i,j],’ ’);
                   writeln;
                end;
        readln;
end.
```

Subiectul III

1. **Răspuns corect:** a. (frezie, iris, nard, lalea, mac)
2. **Răspuns corect: f (105,105) =1** (deoarece x=y)
   f (105,42)=4 deoarece:
   f (105,42) = 1 + f (63,42) = 4
   f (63,42) = 1 + f (21,42) = 3
   f (21,42) = 1 + f (21,21) = 2
   f (21,21) = 1

3.
```
procedure cifre(n:longint);
 var i:integer;
     v:array[0..9] of integer;
 begin
        while n<>0 do
           begin
                 v[n mod 10]:=v[n mod 10] +1;
                 n:=n div 10;
           end;
        for i:=0 to 9 do
                 if v[i]<>0 do write (i,'  ');
 end;
```

4.

a. Se citesc din fișier la prima deschidere a acestuia numerele n, x și y. Se închide fișierul, iar apoi la a doua deschidere se citesc pe rând elementele de pe a doua linie a fișierului verificându-se în același timp dacă elementul este cuprins în intervalul [x,y]. Programul se oprește în momentul în care a fost găsit un element valid sau nu mai sunt elemente în fișier. Prima valoare găsită va fi și elementul maxim deoarece elementele se găsesc în ordine descrescătoare în fișier. Eficiența constă în faptul că nu se folosește tablou pentru memorarea elementelor și dacă se găsește un element valid algoritmul se oprește și nu se parcurge fișierul până la capăt.

b.
```
var f:text;
    x,y,i,nr:integer;
```

```
    ok:boolean;
begin
        assign(f,'bac.txt');
        reset(f);
        readln(f,n);
        readln(f);
        read(f,x,y);
        close(f);
        reset(f);
        readln(f);
        i:=0;
        ok:=false;
        while (ok=false) and (i<=n) do
         begin
                read(f,nr);
                if (nr>=x) and (nr<=y) then
                        begin
                                write(nr);
                                ok:=true;
                        end;
                i:=i+1;
        end;
       close(f);
       if ok=false then write ('nu exista');
 readln;
end.
```

Între jocuri şi matematică

prof. Klára Alexuţan
Colegiul Tehnic "Al. Papiu-Ilarian" Zalău

1. Problema lui Ahmes

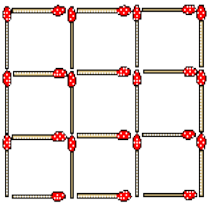
În șapte case sunt șapte pisici. Fiecare pisică mănâncă șapte șoareci. Dacă ar fi trăit, fiecare șoarece ar fi mâncat șapte saci de grâu. Din fiecare sac de grâu s-ar fi măcinat șapte kg de făină. Câte kg de făină au fost salvate de pisici?

2. Suma este 15

Suma a cinci numere întregi și diferite unul de celălalt este 15. Produsul celor 5 numere este 120. Care sunt cele 5 numere?

3. Pătrate

Pătratul mare alăturat este realizat din 24 de bețe de chibrit. Înlătură 8 bețe, astfel încât să rămână 2 pătrate care să nu se atingă reciproc.

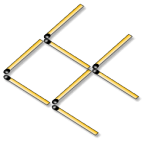


4. Strângeri de mână

La o întâlnire de afaceri, fiecare participant dă mâna cu fiecare dintre ceilalți o singură dată. Dacă au fost în total 15 strângeri de mână, câte persoane au participat la întâlnire?

5. Peștele din chibrituri

Mutând 3 bețe de chibrit schimbă direcția peștelui spre dreapta.



6. Perechi în rânduri și coloane

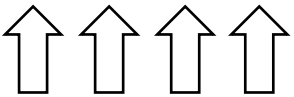
Scopul jocului este de a amplasa 22 de monede pe tabla de joc din figură, respectând următoarele reguli:
- fiecare rând trebuie să conțină 3 monede
- fiecare coloană trebuie să conțină 3 monede
- pe fiecare rând sau coloană trebuie să se afle cel mult două monede alăturate

7. Cu fața la sud

Cum poți construi o casă care să aibă o fereastră pe fiecare dintre cei patru pereți, dar fiecare fereastră să fie către sud?

8. Cinci săgeți

Rearanjează cele 4 săgeți de mai jos astfel încât să rezulte 5 săgeți.



9. Ultima problemă

Doi matematicieni ruși se întâlnesc într-un avion. ”Dacă îmi aduc aminte bine, ai trei băieți” zice Ivan. ”Ce vârste au azi?” ”Produsul vârstelor lor este 36”, spune Igor, ”iar suma vârstelor lor este exact data zilei de azi”. ”Îmi pare rău, Igor”, spune Ivan după un minut, ”dar încă nu am toate datele necesare”. ”Oh, am uitat să-ți spun că cel mai mic fiu are părul roșu”. ”Acum îmi este clar”, zice Ivan. ”Știu exact ce vârste au fiii tăi”. Cum a aflat Ivan vârstele copiilor?

Aşteptăm rezolvările voastre pe adresa redacţiei!

Bibliografie

1. **Moscovich, Ivan,** *Marea carte a jocurilor minţii – Probleme creative de logică, geometrie și modele matematice*, Editura Litera, Bucureşti, 2009

2. **Moscovich, Ivan,** *Marea carte a jocurilor minţii – Probleme creative de logică, matematică și fizică,* Editura Litera, Bucureşti, 2010

Informatica pe Internet

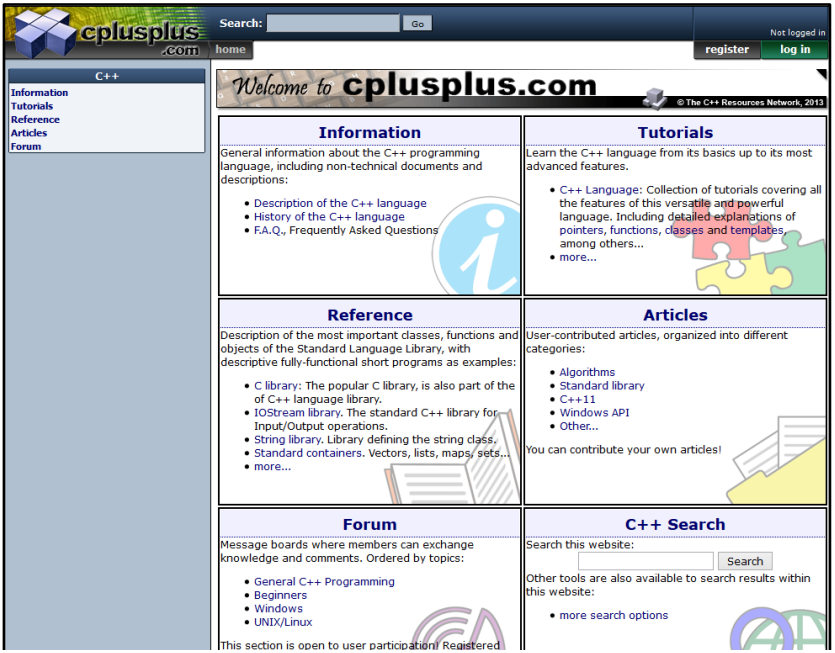
Prof. Ioana Ionescu
C.T. ”Al. Papiu Ilarian” Zalău

În acest număr al revistei vă voi prezenta 2 site-uri utile pentru cei care vor să învețe ceva în plus decât se predă la clasă despre C++.

Începem popasul nostru prin lumea C++ pe site-ul www.worldit.info (http://www.worldit.info/articole/tutoriale-video-c-in-limba-romana/). Un lucru inedit este faptul că majoritatea tutorialelor sunt în format video, deci foarte ușor de urmărit și înțeles. Începem, bineînțeles cu o introducere în limbajul C++ urmată de:

- Structuri condiționale
- Funcții
- Funcții matematice
- Matrici
- Pointeri

Al doilea site interesant despre C++ este http://www.cplusplus.com/ (http://www.cplusplus.com/doc/tutorial/), mult mai complex, plin de informații, tutoriale și aticole despre acest limbaj de programare.



Fiind scris în întregime în limba engleză veți avea ocazia să vă exersați și cunoștințele din acest domeniu ☺. Trecând peste acest mic impediment multitudinea de informții bine structurate vă va ajuta în procesul de învățare de la clasă.

Tutorialele explică limbajul C++ pornind de la elementele de bază și până la cele mai complexe facilități. Capitolele au o orientare practică, cu exemple de programe în fiecare secțiune care vă dau ocazia să exersați ceea ce s-a prezentat în mod teoretic.

Vă doresc succes în deslușirea tainelor acestui limbaj de programare și sunt sigură că tutorialele prezentate în cele două site-uri vă vor fi de un real ajutor.

Bazar

Matematica în filatelie (5)

Prof. Matyas Mirel
C.T. ”Al.Papiu Ilarian” Zalău

În filatelia mondială sunt nenumărate emisiuni de mărci poştale sau plicuri filatelice dedicate matematicienilor celebri. De regulă, acestea sunt emise cu ocazia diferitelor aniversări sau comemorări. Continuăm şi în acest număr al revistei nostre să vă prezentăm astfel de exemple. Ne-am oprit la marele matematician şi fizician elveţian Leonhard Euler – cel care a influenţat decisiv matematica secolului al XVIII-lea.

Leonhard Euler (1707-1783) a avut contribuţii importante în sistematizarea matematicii, lui i se datorează introducerea noţiunilor de funcţie şi folosirea notaţiei consacrate *f(x)* dar şi introducerea literei *e* ca notaţie pentru baza logaritmului natural (numărul lui Euler) sau a numărului imaginar *i*.

Primul timbru filatelic dedicat lui Euler a fost emis în 17 aprilie 1957 de către Uniunea Sovietică pentru a comemora 250 de ani de la naşterea ilustrului matematician. Trebuie amintit faptul că Euler a fost şeful comisiei de matematică al Academiei de Ştiinţe din Sankt Petersburg şi a activat aici mai mulţi ani. De altfel, mormântul său este în fosta capitală a Împeriului Rus. În acelaşi an, ţara sa natală, Elveţia emite un timbru cu ocazia aceleiaşi aniversări. Timbrul aparţinând seriei ”Pro Juventute 1957” conţine celebra relaţie $e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$ şi are valoarea de 5+5 franci elveţieni.

În anul 1983, pentru a comemora 200 de ani de la moartea sa, Republica Democrată Germană emite un timbu cu valoarea nominală de 20 mărci est-germane în care alături de figura lui Euler apare un poliedru şi celebra formulă *e-k+f=2* care exprimă relaţia dintre vârfurile (*e*), muchiile (*k*) şi feţele (*f*) oricărui poliedru regulat.

Un alt moment aniversar important a fost anul 2007 când s-au aniversat 300 de ani de la naşterea savantului. Prilej pentru diferite emisiuni filatelice ale diveselor state. Astfel, pe 15 aprilie 2007, Elveția lansează o marcă poștală dedicată lui Euler.

Tot în Elveția este emis un plic filatelic prima zi (First Day Cover) în care un bloc de 4 mărci sunt francate cu o ștampilă aniversară cu inscipția ”4000 BASEL AUSGABETAG 6 MARZ 2007” având în centrul celebra formulă *e-k+f=2* numele matematicianului şi anii între care a trăit.

Şi Rusia marchează momentul prin emiterea unui plic aniversar ce are o imagine de epocă cu figura lui Euler și cea a Academiei de Științe din Sankt Petersburg.

Bibliografie:Image of Mathematicians on Postage Stamp (http://jeff560.tripod.com/stamps.html)

Profil

O confirmare
Dezmerean Robert Dănuț - clasa a XII-a
promoția 2014-2015

Prof. diriginte Alexuțan Klára
C.T. ”Alesandru Papiu Ilarian” Zalău

Catedra de Matemtică-Informatică a Colegiului Tehnic ”Alesandru Papiu Ilarian” Zalău, a acordat în 2015 Premiul de Excelență elevului Dezmerean Robert Dănuț din clasa a XII-a A, pentru rezultatele foarte bune obținute în cei patru ani de liceu la concursurile de matematică și informatică.

A obținut mențiune la Concursul Interjudețean de Matematică ”Teodor Topan” desfășurat în data de 13 decembrie 2014 la Șimleu Silvaniei (prof. Alexuțan Klara) dar și premiul III la etapa județeană a Olimpiadei de Informatică (prof. Ionescu Ioan și prof. Mureșan Alexandru).

Elevul deștept, modest, politicos care a stat în ultima bancă de la geam a confirmat încă o dată: a obținut singura notă de 10 la disciplina matematică, profil matematică - informatică la Examenul de Bacalaureat, iar apoi a fost admis la Universitatea „Babeş-Bolyai” Cluj-Napoca, Facultatea de Matematică și Informatică, specializarea Informatică – Limba engleză, buget.

Îți urăm drum bun, succes și știm că vom auzi numai de bine!

Ne mândrim cu tine!

Informații utile
Cum se poate publica în revista MI API ?

Revista de Matematică și Informatică MI API se adresează tuturor celor care se simt atrași de matematică și informatică. Este deschisă atât elevilor cât și profesorilor de la Colegiul Tehnic ”Alesandru Papiu Ilarian” Zalău, dar și de la alte școli din județ sau din țară.

Profesorii de matematică, care vor să publice articole, studii, chestiuni de metodică, probleme propuse etc, trebuie să trimită pe adresa redacției materialele redactate în format electronic, respectând următoarele condiții:

- pentru editarea materialelor se va folosi una din versiunile Microsoft Office 2007 sau 2010;
- pagina va fi setată la A5, textul va fi scris cu fontul Times New Roman, dimensiunea acestuia va fi de 11;
- pentru editarea formulelor și a ecuațiilor matematice se va folosi editorul de ecuații implicit;
- figurile geometrice se vor realiza astfel încât acestea să fie lizibile;
- articolele vor fi însoțite de numele autorului / autorilor precum și de școala de proveniență a acestora;
- sursele de informații folosite se vor indica în bibliografie;
- se recomandă ca textele să nu depășească 4 pagini A5;

Elevii, indiferent de școala de proveniență, pot publica articole în revista MI API dacă au recomandarea profesorului de matematică sau informatică de la clasă. Respectarea cerințelor prezentate mai sus sunt obligatorii și pentru aceștia.

Redacția își rezervă dreptul de a selecta materialele trimise spre publicare. De asemenea, responsabilitatea în ce privește conținutul articolelor revine în totalitate autorilor.