Revista MI API premiată la nivel județean

Prof. Matyas Mirel
C.T. "Al.Papiu Ilarian" Zalău

Atunci când am pornit la drum, în urmă cu 10 ani, nu ne-am propus să concurăm cu alte reviste de profil. Nu ne-am propus să obținem premii și mențiuni, nu acesta a fost scopul declarat al revistei. Am vrut să oferim elevilor și profesorilor de matematică și informatică de la Colegiul Tehnic "Alesandru Papiu Ilarian" Zalău o revistă în care să se poată exprima prin articole de specialitate, o revistă care să contribuie la o mai bună pregătire la matematică și informatică a elevilor talentați dar și să-i atragă spre studiul acestor discipline pe ceilalți.

Se pare că în mare parte obiectivele noastre au fost atinse. Cu multă muncă și perseverență, an de an am adus mai aproape de cei interesați matematica și informatica prin articole diverse, prin probleme propuse sau rezolvate.

Efortul nostru a fost răsplătit curând, când în cadrul Concursului Revistelor Școlare – etapa județeană, revista MI API a obținut premiul I la secțiunea reviste științifice, cu numărul aniversar (Anul V, nr.4 (14) / decembrie 2013).

Dedicăm acest premiu tuturor celor care pe parcursul a 10 ani au reușit să ducă revista MI API la standarde ridicate de calitate și profesionalism. Felicitări tuturor elevilor, profesorilor, colaboratorilor!

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

ISJ Sălaj
Inspectoratul Școlar Județean Sălaj

Diplomă

Se acordă PREMIUL I

elevului / elevei REVISTEI „MI API"

din clasa ..... de la Școala COLEGIUL TEHNIC „ALESANDRU PAPIU ILARIAN" - ZALĂU

pentru rezultatele obținute la CONCURSUL DE REVISTE ȘCOLARE

etapa județeană, în anul școlar 2013 / 2014.

Inspector Școlar General,
prof. Bancea Gheorghe

Inspector Școlar,
prof. Lucaciu Marcel

Zalău, 2014

Chestiuni metodice

Continuăm şi în acest număr al revistei MI API să abordăm din punct de vedere metodic, teme din programa de matematică care fac obiectul Examenului de Bacalaureat. Vă prezentăm tema **"Matrice şi Determinanţi"** care în structura probei scrise a examenului ocupă subiectul II, problema 1.

Materialul de faţă a fost prezentat de către doamna profesoară Gavriş Loredana la cercul pedagogic desfăşurat în şcoala noastră la data de data de 29 noiembrie 2013.

Modele de itemi pentru examenul de bacalaureat la matematică

Prof. Loredana Gavriş
C.T. "Al.Papiu Ilarian" Zalău

1.Tipuri de cerinţe întâlnite pentru programa M1

Nr. crt.	Cerinţe	Noţiuni teoretice
1	*Să se calculeze / Să se arate că:* a) S=A-XY, B^3, A^3, A^{100} A^2-B^2, AB, f(B), AB+BA, AA^t, $(A-A^t)^{2008}$ (unde A,B,X,Y, sunt matrice date) b) $A^3-A=A^2-I_3$, $A^2=32A$, $f(A)=I_2$, $(I_2+A)^2=I_2+A$, $A^2-A-2I_3=O_3$ $A^2=3A$ $A^2-2A+I_3\neq O_3$ $Tr(A+A^t)=2Tr(A)$ (unde A este o matrice dată),	• Operaţii de calcul cu matrice • Scrierea matricei transpuse • Urma unei matrice
2	*Să se calculeze / Să se arate că:* a) A^{2008}, B^n b) $A^n-A^{n-2}=A^2-I_3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $A^{n+1}=14A^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $(I_3+A)^n=2^{n-1}(I_3+A)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $A^n = 2^n \cdot I_3 + \frac{(-1)^n-2^n}{3} \cdot B$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ c) Rangul matricei A^n este 1 $\forall n \in \mathbb{N}^*$	• Operaţii de calcul cu matrice • Inducţie matematică

	(unde A si B sunt o matrice date)	• Rangul unei matrice
3	*Să se determine rangul unei matrice date sau rezultată în urma efectuării unor operații matriciale*	• Rangul unei matrice
4	*a) Să se calculeze determinanții diferitelor matrice date sau a celor obținute prin calcule directe* *b) Să se determine un parametru când se cunoaște determinantul unei matrice date sau a unei relații ce implică determinantul*	• Calcularea determinantului unei matrice • Rezolvări de ecuații algebrice
5	*a) Calcularea inversei unei matrice date* *b) Să se arate că o matrice dată sau obținută prin calcule este inversabilă*	• Calcularea inversei unei matrice
6	*Rezolvarea de ecuații matriciale*	• Ecuații matriciale

2. Tipuri de cerințe întâlnite pentru programa M2

Nr. crt.	Cerințe	Noțiuni teoretice
1	*Să se calculeze / Să se arate că:* a) A^3, B^2, A^2+B^2, A^2+A, $A(1)+A(2)$ b) $X(A)\cdot X(b) = X(a+b+ab)$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, unde $X(a)=I_2+aA$ $A(a)\cdot A(b) = A(2ab),\ a,b \in \mathbb{R}$ $A^2 = (2x-6)-(x^2-6x+8)\cdot I_2, x \in \mathbb{R}$ $A_x \cdot A_y = A_{x+y},\ x,y \in \mathbb{R}$ $A_x^2=2xA_x+(1-x^2)I_2, x \in \mathbb{R}$ $A^2+A^3=O_2$, $AB-2B=O_2$, $A^3+A^2+A=O_3$ $AB=BA$, $A^2=I_3$, $A^2=4(A-I_2)$, $A^2=aI_2+bA$ $a,b \in \mathbb{R}$, $A=I_3+B$, $A\left(\frac{1}{2}\right)=I_3$, $A^2-8A+12I_2=O_2$ $f(A)=I_3+B$, $f(A)^3 = I_3+3B+3B^3$ $C^4=5^4I_2$, unde $C=A+B$ (unde A,B,C,X, sunt matrice patratice date)	• Operații de calcul cu matrice • Proprietățile operațiilor cu matrice
2	*Să se determine inversa* *a)* A^{-1} *b)* matricei $-A^2$, $(A-B)^2$ *Să se determine x astfel încât A să fie inversabilă, unde* $x \in \mathbb{R}$ *Să se arate că o matrice este inversabilă* *Să se arate că* $(A+I_2)^{-1}=A-I_2$	• Inversa unei matrice pătratice
3	*Să se determine*	• Operații cu matrice

	$A+2A^2+\ldots+10A^{10}$ $A+A^2+\ldots+A^{2008}$ (unde A este o matrice dată),	• Inducție matematică
4	*Să se calculeze determinantul / Să se arate că:* a) D(9), D(0), det (I_3+B), D(1,1,0) detX(a), unde X(a)=I_2+aA b) d=1/2(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2), $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ (unde a,b,c apar în elementele unei matrice date) (unde A și B sunt matrice date)	• Calcularea determinanților de ordinul 2 sau 3
5	*Să se calculeze valoarea unui determinant a cărui elemente sunt soluțiile unei ecuații algebrice*	• Calcularea det de ordinul 2 sau 3 • Ecuații algebrice
6	*Să se determine* $a \in \mathbb{R}$ *știind că* $A^3-aA^2+4A=O_2$, $A^2=2A$ detA=0, D(3^a)=0, D(a)=-4 detX(a)=$(2a-1)^3$, unde X(a)=I_3+aA D(a)=-(a-1)^2(a+2)	• Calcularea determinanților de ordinul 2 sau 3 • Ecuații algebrice
7	*Să se determine matricea patratica X astfel încât să aibă loc o ecuație matricială* $AXB=O_2$ $AX=I_3$	• Ecuații matriciale
8	*Determinarea* - opusei unei matrice, - inversei unei matrice, într-o multime dată de matrice de forma $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), AX = XA\}$ *Să se arate că G este grup comutativ în raport cu adunarea matricelor.*	• Operații cu matrice • Inversa unei matrice • Grupuri

3. Aplicații pentru programa M1

Pb 1. (*Examenului de Bacalaureat – sesiunea august 2013 Filieră teoretică. Profil matematică informatică)*

Pentru fiecare număr real *m* se consideră matricea

$$A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & 0 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}.$$

a) Calculați $det\big(A(1)\big)$.

b) Determinați numerele reale *m* știind că

$$A(m) \cdot A(-m) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Arătați că $det(A(1) + A(2) + \cdots + A(101)) = -51^2 \cdot 101^3$.

Cum gândim?	**Ce trebuie să știm?**
• scriem determinantul matricei înlocuind pe *m* cu 1 $\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ • aplicăm *regula triunghiului* sau *regula lui Sarrus* pentru a calcula valoarea determinantului $det(A(1)) = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 1 = -1$	• Să scriem determinantul unei matrice • Să aplicăm *regula triunghiului* sau *regula lui Sarrus* pentru a stabilii valoarea determinantului

b).

Cum gândim?	**Ce trebuie să știm?**
• Scriem matricele A(m) si A(-m), ca apoi să efectuăm produsul celor două matrice $A(m) \cdot A(-m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & 0 \\ m & 0 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -m & 0 & 0 \\ -m & 0 & -m \end{pmatrix}$ • Realizăm produsul celor 2 matrice $A(m) \cdot A(-m) = \begin{pmatrix} 1-2m & 1 & 1-m \\ m & m & m \\ m-m^2 & m & m-m^2 \end{pmatrix}$ • Egalăm rezultatul obținut cu ceea ce avem dat la b) $\begin{pmatrix} 1-2m & 1 & 1-m \\ m & m & m \\ m-m^2 & m & m-m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ • Din egalitatea celor două matrice obținem că *m=1*	• Efectuarea produsului a două matrice pătratice de ordinul trei • Condiția ca două matrice să fie egale (fiecare element al primei matrice trebuie sa fie egal cu omologul său din ceea de a doua matrice)

c)

Cum gândim?	**Ce trebuie să știm?**
• Scriem matricele pentru A(m) înlocuind pe rând pe m cu valorile de la 1 până la 101 $A(1) + A(2) + \cdots + A(101)$ $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 101 & 0 & 0 \\ 101 & 0 & 101 \end{pmatrix}$ • Facem adunarea matricelor obținute $= \begin{pmatrix} 101 & 101 & 101 \\ 1+2+\cdots+101 & 0 & 0 \\ 1+2+\cdots+101 & 0 & 1+2+\cdots+101 \end{pmatrix}$ • Observăm că unele dintre elementele matricei obținute reprezintă suma primelor 101 numere naturale, facem suma lor și obtinem	• Efectuarea sumei dintre mai multe matrice pătratice de ordinul trei (fiecare element dintr-o matrice se adună cu omoloagele sale din celelalte matrice) • Formula de calcul a sumei primelor n nr. naturale

$$= \begin{pmatrix} 101 & 101 & 101 \\ \frac{101(101+1)}{2} & 0 & 0 \\ \frac{101(101+1)}{2} & 0 & \frac{101(101+1)}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 101 & 101 & 101 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 0 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 101 \cdot 51 \end{pmatrix}$$

- Scriem determinantul matricei obținute în urma calculelor

$$det\big(A(1) + A(2) + \cdots + A(101)\big) = \begin{vmatrix} 101 & 101 & 101 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 0 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 101 \cdot 51 \end{vmatrix}$$

- Calculam valoarea determinantului scoțând ca factor pe 101 și pe 51, și obținem

$$= 101^3 \cdot 51^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- Determinantul rămas necalculat este cel calculat la punctul a), adică -1 și atunci avem

$$det\big(A(1) + A(2) + \cdots + A(101)\big) = -101^3 \cdot 51^2$$

q.e.d.

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{n}$

- Aplicarea proprietăților determinanților cu scopul ușurării calculului determinantului

Pb. 2 (*Examenului de Bacalaureat – sesiunea iulie 2013 Filieră teoretică)*

Se consideră determinantul $D(a,b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix}$ unde *a și b* sunt numere reale

a) Arătați că $D(a,b) = 2$

b) Verificați dacă $D(a,b) = (a-1)(b-1)(b-a)$ pentru orice numere reale *a* și *b*

a)

Cum gândim?

- scriem determinantul $D(2,3)$ înlocuind pe *a* cu 2 și pe *b* cu 3 în determinantul din enunț

$$D(2,3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & 1 \\ 3 & 3^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

- aplicăm *regula triunghiului* sau *regula lui Sarrus* pentru a calcula valoarea determinantului

$= 4 + 18 + 3 - 12 - 9 - 2 = 2$

Ce trebuie să știm?

- Să înlocuim elementele determinantului cu valorile numerice date
- Să aplicăm *regula triunghiului* sau *regula lui Sarrus*

	pentru a stabilii valoarea determinantului

b)

Cum gândim?	**Ce trebuie să știm?**
• scriem determinantul $D(a,b)$ și facem zerouri pe prima linie aplicând proprietățile determinanților • astfel scădem ultima coloană din primele două coloane $D(a,b)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & a^2 & 1\\ b & b^2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ a-1 & a^2-1 & 1\\ b-1 & b^2-1 & 1\end{vmatrix}$ • calculăm determinantul rămas după tăierea primei linii și a ultimei coloane $D(a,b)=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a-1 & a^2-1\\ b-1 & b^2-1\end{vmatrix}$ $=(a-1)(b^2-1)-(b-1)(a^2-1)$ • aplicăm formula de calcul prescurtat x^2-y^2 și scoatem ca factori pe (a-1) și (b-1) cu scopul de obține relația cerută $=(a-1)(b-1)(b+1)-(b-1)(a-1)(a+1)$ $=(a-1)(b-1)[(b+1)-(a+1)]$ $=(a-1)(b-1)(b-a)$ q.e.d.	• Aplicarea proprietăților determinanților cu scopul ușurării calculului determinantului • *Regula de calcul a determinanților de ordinul 2* pentru a stabilii valoarea determinantului (produsul elementelor de pe diagonala principală - produsul elementelor de pe diagonala secundară) • Formula de calcul prescurtat $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ • Scoaterea factorului comun

Pb. 3 (*Examenului de Bacalaureat – sesiunea speciala olimpici 2013 Filieră teoretică. Profil matematică informatică)*

Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$

a) Calculați *det(A(0))*

b) Determinați valorile reale ale lui *a* pentru care $5A(a)-(A(a))^2=4I_3$

c) Determinați inversa matricei A(2)

a)

Cum gândim?	**Ce trebuie să știm?**
• scriem determinantul matricei înlocuind pe a cu 0 $\det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ • aplicăm *regula triunghiului* sau *regula lui Sarrus* pentru a calcula valoarea determinantului $det(A(0)) = 1 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 2$	• Sa scriem determinantul unei matrice • Sa aplicam *regula triunghiului* sau *regula lui Sarrus* pentru a stabilii valoarea determinantului

b)

Cum gândim?	**Ce trebuie să știm?**
• Știm că $(A(a))^2=A(a)A(a)$ adica $(A(a))^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} a^2+2 & 2a+1 & 2a+1 \\ 2a+1 & a^2+2 & 2a+1 \\ 2a+1 & 2a+1 & a^2+2 \end{pmatrix}$ • Înlocuim în relația dată cele trei matrice A(a), $(A(a))^2$ și I_3 $5\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+2 & 2a+1 & 2a+1 \\ 2a+1 & a^2+2 & 2a+1 \\ 2a+1 & 2a+1 & a^2+2 \end{pmatrix}$ $= 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ • Facem calculele și aplicăm egalitatea a două matrice $\begin{pmatrix} 5a-a^2-2 & 4-2a & 4-2a \\ 4-2a & 5a-a^2-2 & 4-2a \\ 4-2a & 4-2a & 5a-a^2-2 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ Atunci $\begin{cases} 5a-a^2-2=4 \\ 4-2a=0 \end{cases}$ • Rezolvăm ecuațiile obținute și stabilim valoarea lui a pentru care sunt verificate simultan cele două ecuații. Obținem din a II-a ecuație că $a=2$, valoare care satisface și prima ecuație • Scriem soluția S={2}	• Efectuarea produsului a două matrice pătratice de ordinul trei • Operații cu matrice • Condiția ca două matrice să fie egale (fiecare element al primei matrice trebuie să fie egal cu omologul sau din ceea de a doua matrice) • Ecuații algebrice

c)

Cum gândim?	**Ce trebuie să știm?**
• Observăm că relația de la b) este adevărată pentru *a=2* și mai mult, implică matricea unitate I_3. Astfel am putea stabili inversa matricei A(2) fără să o mai construim prin metoda clasică • Scriem relația de la b) pentru a=2 și dăm factor comun pe A(2) la stânga $A(2)\left(5I_3 - A(2)\right) = 4I_3 \Rightarrow A(2)\left[\frac{1}{4}(5I_3 - A(2)\right] = I_3$ • Repetăm procedeul și dăm factor comun pe A(2) la dreapta $\left(5I_3 - A(2)\right)A(2) = 4I_3 \Rightarrow \left[\frac{1}{4}(5I_3 - A(2)\right]A(2) = I_3$ • Deducem în urma celor două rezultate obținute că A(2) este inversabilă și inversa ei este $A(2)^{-1} = \frac{1}{4}(5I_3 - A(2))$ • Înlocuim în ultima relație, facem calculele și stabilim inversa matricei A(2) $A(2)^{-1} = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\right]$ $A(2)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$	• Definitia inversei unei matrice • Operații cu matrice și proprietățile acestora

Pb. 4 *Examenului de Bacalaureat –modelul oficial 2013 Filieră teoretică. Profil matematică informatică)*

Se noteaza cu *D(x,y)* determinantulmatricei $A(x,y) = \begin{pmatrix}x&1&2\\2&x&1\\1&y&x\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

a) Calculati *D(-1,2)*

b) Determinați numărul real q pentru care matricea *A(2,q)* are rangul egal cu 2

c) Arătați că există cel puțin o pereche *(x,y)* de numere reale cu $x \neq y$ pentru care *D(x,y)=D(y,x)*

a)

Cum gândim?	**Ce trebuie să știm?**
• scriem determinantul matricei înlocuind pe *x* cu -1 și pe *y* cu *2*	• Să scriem determinantul unei matrice • Să aplicam *regula*

$D(-1,2)=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}$ • aplicăm *regula triunghiului* sau *regula lui Sarrus* pentru a calcula valoarea determinantului $D(-1,2)=-1+1+8+2+2+2=14$	*triunghiului* sau *regula lui Sarrus* pentru a stabilii valoarea determinantului

b)

Cum gândim?	**Ce trebuie să știm?**
• scriem matricea A(x,y) înlocuind pe *x* cu 2 și pe *y* cu *q* $A(2,q)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & q & 2\end{pmatrix}$ • utilizăm un algoritm de stabilire a rangului unei matrice - există minorul $d=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0\Rightarrow rang\ A(2,q)\geq 2$ • știm că $rang\ A(2,q)=2$ din enunț deci $\Rightarrow D(2,q)=0$ • scriem $D(2,q)$ îl calculăm și îl egalăm cu 0 pentru al găsi pe q $D(2,q)=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & q & 2\end{vmatrix}=8+4q+1-4-2q-4$ $=2q+1$ $2q+1=0\Rightarrow q=-\frac{1}{2}$	• Să scriem o matrice cu anumite elemente date • Să aplicăm un algoritm de determinare a rangului unei matrice • Să calculăm determinantul de ordinul 2 • Sa stabilim rangul unei matrice • Să aplicăm *regula triunghiului* sau *regula lui Sarrus* pentru a stabilii valoarea determinantului de ordinul 3 • Sărezolvăm ecuații algebrice

c)

Cum gândim?	**Ce trebuie să știm?**
• scriem $D(x,y)$ și îl calculăm $D(x,y)=\begin{vmatrix}x & 1 & 2\\ 2 & x & 1\\ 1 & y & x\end{vmatrix}=x^3+4y-4x-xy+1$ • scriem $D(y,x)$ și îl calculăm $D(y,x)=\begin{vmatrix}y & 1 & 2\\ 2 & y & 1\\ 1 & x & y\end{vmatrix}=y^3+4x-4y-yx+1$ • Știm că $D(x,y)=D(y,x)$ și înlocuim în această relație determinanții calculați $x^3+4y-4x-xy+1=y^3-4x+4y-yx+1$	• Să aplicăm *regula triunghiului* sau *regula lui Sarrus* pentru a stabilii valoarea determinantului de ordinul 3 • Să folosim formula de calcul prescurtat $a^3-b^3=$ $=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ • Să rezolvăm ecuații algebrice

• Separăm termenii și reducem termenii asemenea, $x^3 + 4y - 4x - xy + 1 - y^3 - 4x + 4y + yx - 1 = 0$ $x^3 - y^3 - 4x + 4y = 0$ • aplicând formula de calcul prescurtat $a^3 - b^3$ $(x-y)(x^2+xy+y^2) - 4(x-y) = 0$ • dăm factor comun pe (x-y) $(x-y)(x^2+xy+y^2-4) = 0$ • știm că un produs este 0 dacă cel puțin unul dintre factori este 0. Cum prin enunut s-a pus condiția că $x \neq y$ atunci $x^2+xy+y^2-4=0$ • relația obținută are loc de exemplu pentru $x=\sqrt{2}\ si\ y=0$ adică (x,y)=($\sqrt{2}$,0)	

4. Aplicații pentru programa M2

Pb1. (*Examenului de Bacalaureat – sesiunea august 2013 Filiera tehnologică)*

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}b & 1\\ 0 & b\end{pmatrix}$, unde b este număr real.

a) Calculați $detA$.

b) Determinați numărul real b pentru care $A \cdot B = 2I_2$.

c) Determinați numărul real b pentru care $\det(A+B)=0$.

a)

Cum gândim?	**Ce trebuie să știm?**
• scriem determinantul matricei A și îl calculăm $detA=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4-0=4$	• Să scriem determinantul unei matrice • *Regula de calcul a determinantilor de ordinul 2* pentru a stabilii valoarea determinantului (produsul elementelor de pe diagonala principală - produsul elementelor de pe diagonala secundară)

b)

Cum gândim?	**Ce trebuie să știm?**
• Facem produsul dintre A și B (matrice patratice de ordinul 2) și obținem $A \cdot B=\begin{pmatrix}2b & 2-2b\\ 0 & 2b\end{pmatrix}$	• Efectuarea produsului a două matrice pătratice de ordinul trei

• Egalăm matricea obţinută cu $2I_2$ şi stabilim valoarea lui b, utilizând egalitatea dintre 2 matrice $\begin{pmatrix} 2b & 2-2b \\ 0 & 2b \end{pmatrix} = 2I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2b & 2-2b \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow b = 1$	• Condiţia ca două matrice să fie egale (fiecare element al primei matrice trebuie să fie egal cu omologul sau din ceea de a doua matrice)

c)

Cum gândim?	**Ce trebuie să ştim?**
• Facem suma celor două matrice A şi B $A + B = \begin{pmatrix} 2+b & -1 \\ 0 & 2+b \end{pmatrix}$ • Calculăm determinantul matricei rezultate în urma sumei efectuate $\det(A+B) = (2+b)^2$ • Egalăm valoarea obţinută cu 0 şi stabilim valoarea lui b $(2+b)^2 = 0 \Leftrightarrow b = -2$	• Efectuarea sumei dintre două matrice pătratice de ordinul doi (fiecare element din prima matrice se adună cu omologul său din a doua matrice) • *Regula de calcul a determinanţilor de ordinul 2* pentru a stabilii valoarea determinantului (produsul elementelor de pe diagonala principală- produsul elementelor de pe diagonala secundară) • Rezolvarea ecuaţiilor algebrice

Pb. 2 (*Examenului de Bacalaureat – sesiunea iulie 2013 Filiera tehnologică)*

Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $\mathrm{M}(a) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$

a) Arătaţi că $M\left(\frac{1}{2}\right) + M\left(-\frac{1}{2}\right) = M(0)$

b) Determinaţi numărul real a pentru care $\det\big(M(a)\big) = 0$

c) Determinaţi matricea $M(-2) + M(-1) + M(0) + M(1) + M(2)$

Cum gândim?	**Ce trebuie să ştim?**
• Scriem matricile pt. $a = \frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{2}$ si $a = 0$ $M\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2\cdot\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2$	• Să înlocuim elementele matricei cu valorile numerice date • Să recunoaştem matricea unitate şi matricea nulă

$$M\left(-\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & 0\\ 0 & 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-\mathrm{I}_2$$

$$M(0)=\begin{pmatrix}2\cdot 0 & 0\\ 0 & 2\cdot 0\end{pmatrix}=\mathrm{O}_2$$

- Inlocuim relatiile obtinute in relatia din enunt
  $M\left(\frac{1}{2}\right)+M\left(-\frac{1}{2}\right)=I_2+(-I_2)=O_2=M(0)$

b)

Cum gândim?	**Ce trebuie să știm?**
• scriem determinantul matricei M și îl calculăm $det\big(M(a)\big)=\begin{vmatrix}2a & 0\\ 0 & 2a\end{vmatrix}=4a^2$ • Egalăm valoarea determinantului cu 0 și stabilim valoarea lui *a* $4a^2=0\Rightarrow a=0$	• Să scriem determinantul unei matrice • *Regula de calcul a determinanților de ordinul 2* pentru a stabilii valoarea determinantului (produsul elementelor de pe diagonala principală - produsul elementelor de pe diagonala secundară) • Ecuații algebrice

c)

Cum gândim?	**Ce trebuie să știm?**
• Observăm o proprietate a matricei M(a) dată și anume M(0). $\mathrm{M(a)+M(-a)}=\begin{pmatrix}2a & 0\\ 0 & 2a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2a & 0\\ 0 & -2a\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\mathrm{M(0)},\forall a\in\mathbb{R}$ • Adunarea matricelor este comutativă și atunci conform celor de mai sus obținem $M(-2)+M(-1)+M(0)+M(1)+M(2)$ $=M(-2)+M(2)+M(0)+M(1)+M(-1)$ $=M(0)$ • Matricea căutată este $M(0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	• Efectuarea sumei dintre două matrice pătratice de ordinul doi (fiecare element din prima matrice se adună cu omologul său din a doua matrice) • Proprietățile adunării matricelor

Pb. 3 (*Examenului de Bacalaureat – sesiunea speciala olimpici 2013 Filieră tehnologica)*

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

a) Calculați *detA*

b) Determinați numărul real *x* pentru care $A\cdot A-xI_2=A,\ \ unde\ \ I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

c) Determinați matricele $M=\begin{pmatrix}m & m\\ m & 1\end{pmatrix}$, știind că det(M+A)=0, unde *m* este număr real

a)

Cum gândim?	**Ce trebuie să știm?**
• scriem determinantul matricei A și îl calculăm $det(A)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1$	• Să scriem determinantul unei matrice • *Regula de calcul a determinantilor de ordinul 2* pentru a stabilii valoarea determinantului (produsul elementelor de pe diagonala principala - produsul elementelor de pe diagonala secundara)

b)

Cum gândim?	**Ce trebuie să știm?**
• Stabilim cât este $A\cdot A$ și xI_2 $A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ $xI_2=x\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}$ • Înlocuim în relația dată $A\cdot A$, xI_2 și A $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ • Facem calculele și aplicăm egalitatea a două matrice $\begin{pmatrix}2-x & 1\\ 1 & 1-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ Atunci $\begin{cases}2-x=1\\ 1-x=0\end{cases}$ • Rezolvăm ecuațiile obținute și stabilim valoarea lui *x* pentru care sunt verificate simultan cele două ecuații. Obținem din prima ecuatie că *x=1*, valoare care satisface și a II-a ecuație • Scriem soluția S={1}	• Efectuarea produsului a două matrice pătratice de ordinul doi • Operații cu matrice • Condiția ca două matrice să fie egale (fiecare element al primei matrice trebuie sa fie egal cu omologul său din ceea de a doua matrice) • Ecuații algebrice

c)

Cum gândim?	**Ce trebuie să știm?**
• Stabilim cine este *M+A* $\boldsymbol{M+A}=\begin{pmatrix}m & m\\ m & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m+1 & m+1\\ m+1 & 1\end{pmatrix}$ • Calculăm *det(M+A)* și îl egalăm cu 0 $\det(M+A)=\begin{vmatrix}m+1 & m+1\\ m+1 & 1\end{vmatrix}$ $\det(M+A)=m+1-(m+1)^2=-m^2-m$ Deci $-m^2-m=0$ • Rezolvăm ecuația obținuta cu necunoscuta *m* m(m+1)=0⇒ $m=0\ sau\ m=-1$ • Utilizând valorile obținute pentru necunoscuta *m* scriem matricele căutate $M=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ sau $M=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$	• Operații cu matrice • Să scriem determinantul unei matrice • *Regula de calcul a determinanților de ordinul 2* pentru a stabilii valoarea determinantului (produsul elementelor de pe diagonala principală - produsul elementelor de pe diagonala secundară) • Ecuații algebrice

Pb. 4 (*Examenului de Bacalaureat –modelul oficial 2013 Filieră tehnologica)*

Pentru fiecare număr real x se considera $A(x)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & x\\ 2 & -1 & x\\ x & x & 2\end{pmatrix}$ și se notează determinantul ei cu $\Delta(x)$

a) Calculați $\Delta(1)$

b) Arătați că $\Delta(x)=6(x^2-1)$ pentru orice număr x real

c) Determinați inversa matricei *A(0)*

a).

Cum gândim?	**Ce trebuie să știm?**
• scriem determinantul matricei înlocuind pe *x* cu 1 $\Delta(1)=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$ • aplicăm *regula triunghiului* sau *regula lui Sarrus* pentru a calcula valoarea determinantului $\Delta(1)=2+2+2+1+1-8=0$	• Să scriem determinantul unei matrice • Să aplicăm *regula triunghiului* sau *regula lui Sarrus* pentru a stabilii valoarea det. de ordinul 3

b)

Cum gândim?	**Ce trebuie să știm?**
• scriem determinantul matricei $\Delta(x)=\begin{vmatrix}-1 & 2 & x\\ 2 & -1 & x\\ x & x & 2\end{vmatrix}$ • aplicăm *regula triunghiului* sau *regula lui Sarrus* pentru a calcula determinantul	• Să scriem determinantul unei matrice • Să aplicăm *regula triunghiului* sau *regula lui Sarrus* pentru a

$\Delta(x) = 2 + 2x^2 + 2x^2 + x^2 + x^2 - 8 = 6x^2 - 6$ $\Delta(x) = 6(x^2 - 1)$ q.e.d.	stabilii valoarea determinantului de ordinul 3

c)

Cum gândim?

- scriem matricea *A(0)*

$$A(0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- parcurgem etapele de determinare a inversei unei matrice

etapa I (calcularea determinantului matricei)

- folosim rezultatul obținut la punctul b) ⇒ $\Delta(0) = 6(0^2 - 1) = -6 \neq 0$
- obtinand $\Delta(0) \neq 0 \Rightarrow A(0) este\ invesabilă$

etapa II(scrierea transpusei)

$$^tA(0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

etapa III (construirea adjunctei)

$$A(0)^* = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix}$$ unde $\delta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot d_{ij}$

iar, d_{ij} este un determinant de ordinul doi care se obține prin înlăturarea liniei i și a coloanei j în matricea transpusă

- calculăm valorile pentru δ_{ij}

$$\delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot d_{11} = d_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot d_{12} = -d_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\delta_{13} = (-1)^{1+3} \cdot d_{13} = d_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot d_{21} = -d_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\delta_{22} = (-1)^{2+2} \cdot d_{22} = d_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\delta_{23} = (-1)^{2+3} \cdot d_{23} = -d_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- analog se obtin $\delta_{31} = 0, \delta_{32} = 0\ si\ \delta_{33} =$

Ce trebuie să știm?

- Algoritmul de calcul a inversei unei matrice
- Scrierea transpusei unei matrice
- Construirea adjunctei unei matrice și calcularea elementelor ei
- Calcularea determinantului de ordinul 2
- Formula de calcul a inversei unei matrice

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^*$$

-3 - cu cele calculate mai sus scriem matricea adjunctă $A(0)^* = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ *etapa IV (scrierea inversei)* $A(0)^{-1} = \frac{1}{\Delta(0)} \cdot A(0)^*$ $= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ $A(0)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	

Bibliografie

1. Andras, Szilard Băluna, Mihai Petrescu, L. și colaboratorii – *Bacalaureat 2011 M2, matematică-ghid de pregștire pentru examen* – Editura GIL, Zalău, 2010
2. Băluna, Mihai Panaitopol, Maria Elena Piticari, Mihai Popa, Marcelina și colaboratorii – *Bacalaureat 2012 M1, matematică-ghid de pregătire pentru examen* – Editura GIL, Zalău, 2011
3. Ganga, Mircea – Matematica manual pentru clasa a XI-a TC+CD- Editura MathPress, Ploiești, 2006
4. http://variante-mate.ro

Examene. Concursuri

1. Examenului de Bacalaureat sesiunea iunie-iulie 2014

A. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

Prof. Vasile Sîrb
C.T. "Al. Papiu Ilarian" Zalău

Subiectul I (30 p)

1. Calculaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_1 = 6$ şi $a_2 = 12$.

2. Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + 4$

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(3^x - 1)(3^x - 3) = 0$.

4. Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să conţină cifra 1.

5. Se consideră triunghiul echilateral *ABC* cu *AB=2*. Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

6. Calculaţi aria triunghiului isoscel *ABC* ştiind că $A = \frac{\pi}{2},\ AC = 4$.

Rezolvări:

1. Raţia progresiei este $r = a_2 - a_1 = 12 - 6 = 6$. Termenul $a_3 = a_2 + r = 12 + 6 = 18$. Deci suma primilor trei termeni este $a_1 + a_2 + a_3 = 6 + 12 + 18 = 36$.

2. $f(x) = x^2 + 2x + 4$ Vârful parabolei este $V(x_V, y_V)$. $x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$ iar $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-12)}{4} = 3$. Se poate găsi $y_V = f(x_V) = f(-1) = 1 - 2 + 4 = 3$.

3. Ecuaţia $(3^x - 1)(3^x - 3) = 0$ este echivalentă cu $3^x - 1 = 0$ sau $3^x - 3$, de unde $3^x = 1$ sau $3^x = 3$. Obţinem soluţiile $x = 0$ sau $x = 1$

4. Nr. naturale de două cifre sunt: 10,11,12, ... , 99 în total 90 de numere, astfel avem 90 de cazuri posibile. Nr naturale de două cifre care încep cu 1 sunt:10,11,...,19 iar în care a doua cifră este 1 sunt: 21, 31, ..., 91. Deci sunt 10+8=18 nr. naturale ce conţin cifra 1. Avem 18 cazuri favorabile.

$P = \frac{nr.cazuri\ \ favorabile}{nr.cazuri\ \ posibile} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$.

5. Din regula triunghiului avem $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ este $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = 2$.

6.Triunghiului isoscel *ABC* este dreprunghic cu $A = \frac{\pi}{2}$ şi $AC = 4$.

Atunci şi $AB = 4$. Aria este $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB\cdot AC}{2} = \frac{4\cdot 4}{2} = 8$.

Subiectul II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & a & a\\ a & 2 & 2\\ a & a & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătaţi că $det\big(A(0)\big)=0$.

b) Determinaţi numerele reale a pentru care $det\big(A(a)\big)=0$.

c) Determinaţi matricea $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ ştiind că $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 4\end{pmatrix}$.

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3-2X^2+3X+m$, unde m este număr real.

a) Calculaţi $f(1)$.

b) Arătaţi că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2$.

c) Determinaţi numărul real m ştiind că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=8$.

Rezolvări:

1.a) $det\big(A(0)\big)=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=8$ (folosind regula lui Sarrus sau regula triunghiului).

b) $det\big(A(a)\big)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}2 & a & a\\ a & 2 & 2\\ a & a & 2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow a^3-2a^2-4a+8=0\Leftrightarrow$

$a^2(a-2)-4(a-2)=0\Leftrightarrow(a-2)^2(a+2)=0\Leftrightarrow a=-2$ sau $a=$

c) $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y+z=4\\ x+2y+2z=5\\ x+y+2z=4\end{cases}$

Determinantul sistemului obţinut este $d=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=8+1+2-2-4-2=$

3. Deci este un sistem de tip Cramer şi $x=\frac{d_x}{d}, d_x=\begin{vmatrix}4 & 1 & 1\\ 5 & 2 & 2\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}=16+8+5-$

$8-8-10=3$, de unde $x=\frac{3}{3}=1$. Analog se află $y=\frac{d_y}{d}=1, z=\frac{d_z}{d}=1$.

Atunci $X=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

2. a) $f=X^3-2X^2+3X+m$ deci $f(1)=1-2+3+m=m+2$.

b) Din relaţiile lui Viete avem: $x_1+x_2+x_3=-\frac{-2}{1}=2$ şi $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{3}{1}=3$. Atunci $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+$ *x2x3=22−2·3=−2*

c) x_1, x_2, x_3 sunt rădăcini deci au loc relaţiile:

$x_1^3 - 2x_1^2 + 3x_1 + m = 0$
$x_2^3 - 2x_2^2 + 3x_2 + m = 0$
$x_3^3 - 2x_3^2 + 3x_3 + m = 0$
Adunăm aceste relaţii şi obţinem $(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 3(x_1 + x_2 + x_3) + 3m = 0$.După înlocuiri avem $8 - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 + 3m = 0 \Leftrightarrow m = -6$.

Subiectul III (30 puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to R$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,\infty)$.

b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Arătați că $f(x)\le\dfrac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,\infty)$.

2. Se cănsideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=x^2+x+1$.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{11}{6}$.

b) Pentru fiecare număr natural nenul *n* se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \dfrac{x^n}{f(x)}dx$.

Arătați că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul *n*.

c) Determinați numărul real pozitiv *a* ştiind că $\int_0^a \dfrac{2x+1}{f(x)}dx=\ln 3$.

Rezolvări:

1.a) $f'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{x^2}\right)'=\dfrac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

b) Căutăm asimptota orizontală spre $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\infty}=0$

Deci dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

c) $f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{1-\ln x}{x^2}=0 \Rightarrow 1-\ln x=0 \Rightarrow \ln x=1 \Rightarrow x=e$.

Din tabelul de variație al funcției f deducem că $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,e)$ și $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(e,\infty)$. Deci $x=e$ este punct de maxim $\Rightarrow$ $f(x)\le f(e) \Rightarrow f(x)\le\frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,\infty)$.

2.a)

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2+x+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1=\frac{11}{6}.$$

b) Avem $x^{n+1}\le x^n$ pentru $x\in[0,1]$ și n natural, deci $\frac{x^{n+1}}{x^2+x+1}\le\frac{x^n}{x^2+x+1}$.

Integrăm de la 0 la 1 și obținem $\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+x+1}dx\le\int_0^1\frac{x^n}{x^2+x+1}dx$, adică $I_{n+1}\le I_n$

c)

$$\int_0^a\frac{2x+1}{f(x)}dx=\int_0^a\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right)\Big|_0^1=\ln\left(a^2+a+1\right)$$

.

$\ln\left(a^2+a+1\right)=\ln 3 \Leftrightarrow a^2+a+1=3$, care are soluția pozitivă $a=1$.

B. Filiera tehnologică:profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

prof. Lia Asztaloș
C.T. "Al. Papiu Ilarian" Zalău

Subiectul I (30 puncte)

1. Arătați că $5(2+\sqrt{3})-5\sqrt{3}=10$.

2. Determinaţi numărul real a ştiind că $f(1)=a$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(2x+1)=\log_2 5$

4. Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$ şi $B(3,5)$. Calculaţi distanţa de la punctul A la punctul B .

6. Arătati ca $\sin^2 30^0+\cos^2 45^0=\frac{3}{4}$

Subiectul II (30 puncte)

1. Se consideră matricele A=$\begin{pmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix}3 & x\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, unde x este numarul real.

a) Arătaţi că det A = 0

b) Determinaţi numărul real x ştiind căa B+C= A

c) Arătaţi că $B \cdot B + B = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$.

a) Arătaţi că $0 \circ (-4) = -4$.

b) Arătaţi că $x \circ y = (x+4)(y+4)-4$ pentru orice numere reale x şi y.

c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x \circ x = 12$.

Subiectul III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f : (0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$

a) Arătaţi că $f'(x)= \frac{x+1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{3}{4}$

c) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcţiei f .

2. Se consideră funcţiile $f :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$ şi $F :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$F(x)= e^x - \frac{x^2}{2} - 1$

a) Arătaţi ca $\int_0^1 e^x\,dx = e - 1$

b) Arătaţi că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

c) Calculaţi $\int_0^1 F(x)dx$

Barem de corectare

Subiectul I (30 de puncte)

1.	$5(2+\sqrt{3})=10+5\sqrt{3}$ $5(2+\sqrt{3}) - 5\sqrt{3} = 10+5\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 10$	3p 2p
2.	f(1)=a $\Rightarrow 1+3=$ a a=4	3p 2p
3.	$2x+1=5$ $x=2$ care verifică ecuatia	3p 2p
4.	Sunt 9 numere de două cifre care sunt divizibile cu 10, deci sunt 9 cazuri favorabile Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	2p 1p 2p

	$p=\frac{nr.cazuri.favorabile}{nr.cazuri.posibile}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	
5.	$AB=\sqrt{(2-3)^2+(5-5)^2}$ $AB=1$	3p 2p
6.	$\sin 30^0=\frac{1}{2},\cos 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin^2 30^0+\cos^2 45^0=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$	2p 3p

Subiectul II (30 de puncte)

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{vmatrix}=$ $=4\cdot 2-1\cdot 8=0$	2p 3p
b)	$B+C=\begin{pmatrix}4 & 2+x\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4 & 2+x\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow x=6$	3p 2p
c)	$B\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $B\cdot B+B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	3p 2p
2. a)	$0\circ(-4)=0\cdot(-4)+4\cdot 0+4\cdot(-4)+12=$ $=-16+12=-4$	3p 2p
b)	$x\circ y=xy+4x+4y+16-4=$ $=x(y+4)+4(y+4)-4=(x+4)(y+4)-4$ pentru orice numere x si y	2p 3p
c)	$(x+4)^2-4=12$ $x^2+8x=0\Rightarrow x_1=-8,\ x_2=0$	2p 3p

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f^{'}(x)=\frac{1}{x}-(-\frac{1}{x^2})=$	3p
	$=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x+1}{x^2}, x\in(0,+\infty)$	2p
b)	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f^{'}(2)=$	3p
	$=\frac{2+1}{2^2}=\frac{3}{4}$	2p
c)	$y-f(1)=f^{'}(1)(x-1)$	2p
	$f(1)=$-1, $f^{'}(1)$=2, deci ecuaţia tangentei este $y=2x-3$	3p
2. a)	$\int\limits_0^1 e^x dx=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\Big\|_0^1=$	3p
	$=e^1-e^0=e-1$	2p
b)	$F^{'}(x)=(e^x-\frac{x^2}{2}-1)^{'}=e^x-x=$	3p
	$=f(x)$	2p
	pentru orice număr real x, deci F este o primitivă a functiei f	
c)	$\int\limits_0^1 F(x)dx=\int\limits_0^1(e^x-\frac{x^2}{2}-1)dx=\int\limits_0^1 e^x dx-\int\limits_0^1\frac{x^2}{2}dx-\int\limits_0^1 dx=\ e^x\ \Big\|_0^1$	2p
	$-\frac{x^3}{6}\Big\|_0^1-\ x\Big\|_0^1=$	
	$e^1-e^0-\frac{1}{6}-1=e-\frac{13}{6}$	3p

2. Examenului de Bacalaureat sesiunea august 2014

A. Filiera teoretică, profilulu real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

Prof. Klára Alexuţan
C.T. "Al. Papiu Ilarian" Zalău

Subiectul I (30 puncte)

1. Determinaţi partea reală a numărului complex $z = 1 + 2i + 3i^2$.

2. Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 1$ şi $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 3x - 5$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2-x} = 3^{2x}$.

4. Determinaţi câte numere natural pare, de două cifre, se pot forma cu cifrele 0, 1, 2 şi 3.

5. În reperul cartezian *xOy* se consideră vectorii $\overrightarrow{AB} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ şi $\overrightarrow{AC} = (m+1)\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$, unde *m* este număr real. Determinaţi numărul real *m* ştiind că $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.

6. Se consideră triunghiul ABC cu *AB*=*AC*=3 şi *BC*=$3\sqrt{2}$. Determinaţi $\cos C$.

Subiectul II (30 puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 2x^2 - 2x & 4x & 1 \end{pmatrix}$, unde *x* este un număr real.

a) Arătaţi că $det\big(A(0)\big) = 1$.

b) Arătaţi că $A(x+y) = A(x) \cdot A(y)$ pentru orice numere reale *x* şi *y*.

c) Determinaţi numerele reale *x* ştiind că $A(x^2+2) = A(x) \cdot A(x) \cdot A(x)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX - 2$, unde *a* este un număr real.

a) Arătaţi că $f(2) = 2(a-3)$.

b) Determinaţi numărul real a ştiind că polinomul f este divizibil prin $X^2 - X + 1$.

c) Pentru a=3, rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(2^x) = 0$.

Subiectul III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f: (-2, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2e^x}{x+2}$.

a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{(x^2+2x+2)e^x}{(x+2)^2}, x \in (-2, \infty)$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 0$, situat pe graficul funcţiei *f*.

c) Arătaţi că ecuaţia $f(x) = 1$ are cel puţin o soluţie în intervalul (1, 2).

2.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$.

a) Arătaţi că $I_1 = 1 - ln2$.

b) Arătaţi că $I_{n+1} \leq I_n$, pentru orice număr natural nenul *n*.

c) Demonstraţi că $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Rezolvare:

Subiectul I

1. z=1+2i-3= -2+2i $\Longrightarrow$ partea reală a numărului z este -2

2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x - 1 = 3x - 5 \Longrightarrow x = 2$ şi y=1

3. $x^2 - x = 2x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Longrightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$.

4. Pentru a fi număr par cifra unităţilor trebuie să fie 0 sau 2 iar cifra zecilor poate fi 1, 2 sau 3 $\Longrightarrow$ se pot forma $3 \cdot 2 = 6$ numere.

5. $(m+1)\vec{i} + 4\vec{j} = 6\vec{i} + 4\vec{j} \Longrightarrow m = 5$

6. Observăm că $BC^2 = AB^2 + AC^2$, deci triunghiul ABC este dreptunghic isoscel $\Longrightarrow \cos C = cos45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Subiectul II

1.a) $det\big(A(0)\big) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

b) $A(x+y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 \\ 2(x+y)^2 - 2(x+y) & 4(x+y) & 1 \end{pmatrix}$

$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 2x^2 - 2x & 4x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ 2y^2 - 2y & 4y & 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 \\ 2x^2 + 4xy + 2y^2 - 2x - 2y & 4x + 4y & 1 \end{pmatrix} = A(x+y)$ pentru orice numere reale *x* şi *y*.

c) $A(x) \cdot A(x) \cdot A(x)$=A(3x)(conform b)) $\Longrightarrow x^2 + 2 = 3x \Longrightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$

2.a) $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + a \cdot 2 - 2 = 2a - 6 = 2(a-3).$

b) $f = (X-2)(X^2 - X + 1) + (a-3)X \Longrightarrow a = 3$

c) Conform b) $f = (X-2)(X^2 - X + 1) \Longrightarrow$ ecuaţia devine $(2^x - 2)(2^{2x} - 2^x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Subiectul III

1.a) $f'(x) = \frac{(xe^x)' \cdot (x+2) - xe^x (x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{(x^2+2x+2)e^x}{(x+2)^2}, x \in (-2, \infty)$

b) $f(0) = 0, f'(0) = \frac{1}{2}$. Ecuaţia tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x-0)$. Ecuaţia tangentei este $\Longrightarrow y = \frac{1}{2}x$

c) Fie funcţia $g: [1,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - 1$ continuă pe [1, 2] $g(1) \cdot g(2) = \frac{e-3}{3} \cdot \frac{e^2-2}{2} < 0, \Longrightarrow \exists\, c \in (1,2)$ astfel încât $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = 1$

2.a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = 1 - ln2$

b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n \left(\frac{x}{1+x^{n+1}} - \frac{1}{1+x^n}\right) dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} dx \leq 0, \forall x \in [0,1]$

c) Pentru orice $x \in [0,1]$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n \implies 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 x^n \implies 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \implies \lim_{n\to\infty} I_n = 0.$

B. Filiera tehnologică:profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

prof. Manuela Sabou
C.T. "Al. Papiu Ilarian" Zalău

Subiectul I (30 puncte)

1. Pentru $a=3$ arătaţi că $\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = \frac{5}{6}$.

2. Determinaţi abscisa punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$ şi $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x)=x+1$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+5}=3$.

4. Preţul unei imprimante este de 120 de lei. Determinaţi preţul imprimantei după o scumpire cu 10%.

5. În sistemul cartezian xOz se consideră punctele $A(2,2)$, $B(2,5)$, $C(6,5)$. Determinaţi perimetrul triunghiului ABC:

6. Calculaţi cosA ştiind că $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi unghiul A este ascuţit.

Subiectul II (30 puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde b este număr real.

a) Arătaţi că $detA=-2$.

b) Determinaţi numărul real b pentru care $A+B = AB + C$.

c) Arătaţi că $det(B+2C)=detB-detA$ pentru orice număr real b.

2. Se consideră polinomul $f=x^3-4x^2+x+2$.

a) Arătaţi că $f(1)=0$.

b) Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f prin x−1.

c) Arătaţi că $(x_1+x_2+x_3)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3})=-2$ ştiind că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f

Subiectul III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\ln x$.

a) Arătaţi că $\lim_{x\to 1} f(x)=1$.

b) Arătaţi că $f'(x)=2x-\frac{1}{x}$, $x\in(0,\infty)$.

c) Arătaţi că funcţia este concavă pe $(0.\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 x^2 dx=\frac{1}{3}$.

b) Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei *f*, axa ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Arătaţi că orce primitivă a funcţiei *f* este o funţie crescătoare pe intervalul $(-1,\infty)$.

Barem de corectare

Subiectul I (30 puncte)

1.	$\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{a}=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}$ $=\frac{9-4}{6}=\frac{5}{6}$	2p 3p
2	$2x-3=x+1$ $x=4$	3p 2p
3	$x^2+5=9$ $x_1=-2$ şi $x_2=2$, care verifică ecuaţia	2p 3p
4	$\frac{10}{100}\cdot 120=12$ După scumpire preţul imprimantei este 120+12=132 de lei	3p 2p
5	AB=3, BC=4, AC=5 $P_{\Delta ABC}=3+4+5=12$	3p 2p
6	$\cos A=\sqrt{1-\frac{3}{4}}$ $=\frac{1}{2}$	3p 2p

Subiectul II (30 puncte)

1 a)	a) $\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=$ $=1\cdot 0-1\cdot 2=-2$	2p 3p
b)	$A+B=\begin{pmatrix}b+1 & b+2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $A\cdot B=\begin{pmatrix}b & b+2\\ b & b\end{pmatrix}$, $A\cdot B+C=\begin{pmatrix}b+1 & b+2\\ b & b\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}b+1 & b+2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+1 & b+2\\ b & b\end{pmatrix}<=>b=1$	3p 2p
c)	$\det(B+2C)=\begin{vmatrix}b+2 & b\\ 0 & 1\end{vmatrix}=b+2$	3p

	detB=b=>detB−detA=b+2=>det(B+2C)=detB−detA penru orice număr real b	2p
2 a)	f(1)=$1^3-4\cdot1^2+1+2$= =1−4+3=0	3p 2p
b)	Câtul este x^2-3x-2 Restul este 0	3p 2p
c)	$x_1+x_2+x_3=4$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=1$, $x_1x_2x_3=-2$ $(x_1+x_2+x_3)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3})=\frac{(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)}{x_1x_2x_3}=-2$	3p 2p

Subiectul III (30 puncte)

1 a)	$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}(x^2-\ln x)$ $=1^2-\ln 1=1$	2p 3p
b)	$f'(x)=(x^2-\ln x)'=$ $=(x^2)'-(\ln x)'=2x-\frac{1}{x}$, $x\in(0,\infty)$	2p 3p
c)	$f'(x)=(2x)'-(\frac{1}{x})'=$ $2+\frac{1}{x^2}>0$ pentru orice $x\in(0,\infty)$, deci funcţia este convexă pe intervalul $(0,\infty)$	2p 3p
2 a)	$\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1$ $=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$	3p 2p
b)	$A=\int_0^1\left\|\frac{x^2}{x+1}\right\|dx=\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^1(x-1+\frac{1}{x+1})dx=$ $(\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1))\Big|_0^1=\ln 2-\frac{1}{2}$	3p 2p
c)	F este o primitivă a funcţiei f=>F'(x)=f(x) $F'(x)=\frac{x^2}{x+1}\geq0$ pentru orice $x\in(-1,\infty)$, deci funcţia f este crescătoare pe $(-1,\infty)$	2p 3p

3. Examenul de Bacalaureat 2014 - Informatică

Prof. Ionescu Ioana
C.T. "Al Papiu Ilarian" Zalău

SUBIECTUL I 30(puncte)

1. Expresia Pascal 42 div 10 * 29 div 10 are valoarea: **(4p.)**
a. 6 b. 8 c. 11 d. 18

2. S-a notat cu **x%y** restul împărțirii numărului natural **x** la numărul natural nenul **y** și cu **[z]** partea întreagă a numărului real **z.**

```
citeşte n
      (număr natural nenul)
d←2
┌cât timp d≤n execută
│p←0
│┌cât timp n%d=0 execută
│ p←p+1
│ n←[n/d]
│└■
│┌dacă p%2=0 şi p<>0 atunci
│ scrie d,' '
│└■
│ d←d+1
└■
 scrie n
```

a) Scrieţi valorile afișate dacă se citește numărul **2352**. **(6p.)**
b) Scrieţi două numere cu cel mult două cifre care pot fi citite astfel încât, în urma executării algoritmului, pentru fiecare dintre acestea, să se afișeze valorile **5 1**. **(4p.)**
c) Scrieţi în pseudocod un algoritm, echivalent cu cel dat, în care să se înlocuiască prima structură **cât timp...execută** cu o structură repetitivă de alt tip. **(6p.)**
d) **Scrieți programul Pascal corespunzător algoritmului dat. (10p.)**

SUBIECTUL II 30(puncte)

1. Un graf orientat are 8 vârfuri, numerotate de la 1 la 8, și arcele (1,7), (1,8), (3,5), (3,7), (4,3), (4,7), (6,3), (6,5), (6,7), (6,8), (8,5), (8,7). Numărul vârfurilor care au gradul extern nul este: **(4p.)**
a.1 b. 2 c. 3 d. 4

2. Variabila s poate memora un şir cu maximum 20 de caractere. În urma executării secvenței de instrucțiuni alăturate se afișează: **(4p.)**
a.1b438 b. 1bcd8 c.ba2 d. bcd

```
s:='1b2d3';
s[3]:=chr(ord('a')+2);
s:=copy(s,2,4);
delete(s,4,1);
write(s);
```

3. Se consideră declararea alăturată. Scrieţi o secvenţă de instrucțiuni în urma executării căreia să se afișeze pe ecran mesajul **acceptat**, dacă momentul de timp corespunzător variabilei **start** precede momentul de timp **din aceeași oră**, corespunzător variabilei **stop**, sau mesajul **respins** în caz contrar. **(6p.)**

```
type timp=record
        minut:integer;
        secunda:integer
     end;
var start,stop:timp;
```

4. Considerăm că înălțimea unui arbore cu rădăcină este egală cu cea mai mare dintre lungimile lanțurilor elementare care au o extremitate în rădăcină și cealaltă extremitate în oricare dintre "frunzele" arborelui.
Se consideră arborele cu 9 noduri, numerotate de la 1 la 9, și muchiile [1,2], [2,3], [2,5], [3,7], [4,5], [5,6], [5,8], [8,9]. Scrieți nodurile care pot fi alese drept rădăcină, astfel încât înălțimea arborelui să fie maximă. **(6p.)**

5. Scrieţi un program Pascal care citeşte de la tastatură două numere naturale, m şi n (3≤m≤50, 3≤n≤50), şi elementele unui tablou bidimensional cu m linii şi n coloane, numere naturale cu cel mult patru cifre, apoi modifică tabloul în memorie, eliminând penultima linie și penultima coloană a acestuia, ca în exemplu. Programul afişează pe ecran tabloul obținut, fiecare linie a tabloului pe câte o linie a ecranului, elementele de pe aceeași linie fiind separate prin câte un spațiu. **(10p.)**

Exemplu: pentru m=4, n=5 și tabloul

5	1	2	3	4
8	2	2	5	3
2	1	7	3	9
3	0	9	8	5

se afișează pe ecran tabloul de mai jos:

5	1	2	4
8	2	2	3
3	0	9	5

SUBIECTUL III 30(puncte)

1. Se consideră subprogramul f, definit alăturat. Indicați ce valoare are f(15). **(4p.)**
a. 1 b. 7 c. 8 d. 10

```
function f(n:integer):integer;
begin
        if n<10 then f:=f(n+1)+3
      else if n=10 then f:=7
           else f:=f(n-2)-1
end;
```

2. Utilizând metoda backtracking, se generează toate posibilitățile de a forma șiraguri de câte 4 mărgele de culori distincte din mulțimea {roșu, galben, roz, albastru, violet}, astfel încât în fiecare șirag nu pot fi pe poziții alăturate mărgele roșii și galbene. Două șiraguri sunt distincte dacă au cel puțin o mărgea de culoare diferită sau dacă ordinea culorilor mărgelelor este diferită. Primele cinci soluţii generate sunt, în această ordine, (roşu, roz, galben, albastru), (roşu, roz, galben, violet), (roşu, roz, albastru, galben), (roşu, roz, albastru, violet), (roşu, roz, violet, galben). Scrieţi cea de a şasea şi cea de a şaptea soluţie, în ordinea generării acestora.

(6p.)

3. Un interval cu proprietatea că există un singur număr natural, n ($2 \leq n$), pentru care valoarea produsului $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ aparține acestui interval este numit interval factorial al lui n.
Exemplu: [5,8] și [3,23] sunt intervale factoriale ale lui 3, dar [1,15] și [7,10] nu sunt intervale factoriale ale niciunui număr.
Se consideră subprogramul interval, cu trei parametri:
• n, prin care primește un număr natural din intervalul [2,10].

• a și b, prin care furnizează câte un număr natural, astfel încât expresia b-a să aibă valoare maximă, iar [a,b] să fie interval factorial al lui n.
Scrieţi definiţia completă a subprogramului.
Exemplu: dacă n=3, după apel a=3 și b=23. **(10p.)**

4. Un număr natural x, format din exact două cifre, este numit **sub-număr** al unui număr natural y dacă cifrele lui x apar, în aceeași ordine, pe ranguri consecutive, în numărul y.
Exemplu: 21 este sub-număr al lui 1<u>21</u>45, al lui <u>21</u>3, al lui <u>21</u>, dar nu și al lui 123 sau al lui 231.
Fișierul bac.txt conține cel mult 1000000 de numere naturale din intervalul $[10, 10^9]$, separate prin câte un spațiu.
Se cere să se afișeze pe ecran, separate prin câte un spațiu, sub-numerele care apar de cele mai multe ori în scrierea numerelor din fișier. Pentru determinarea sub-numerelor cerute se utilizează un algoritm eficient din punctul de vedere al timpului de executare. **Exemplu:** dacă fișierul bac.txt

conţine numerele 393 17775787 72194942 12121774 atunci pe ecran se afişează valorile de mai jos, nu neapărat în această ordine: 77 21

a) Descrieţi în limbaj natural algoritmul utilizat, justificând eficienţa acestuia. **(4p.)**

b) Scrieţi programul Pascal corespunzător algoritmului descris. **(6p.)**

Rezolvare

Subiectul I

1. **Răspuns corect:** c. 11 deoarece 42 div 10 * 29 div 10 = 4*29 div 10 = 116 div 10 = 11

2.

a) **Răspuns corect:** 2 7 1 (algoritmul afişează divizorii numărului care apar în descompunerea în factori primi la putere pară urmați de numărul n care devine 1 la final).

b) **Răspuns corect:** 25, 50, 75 ($25=5^2$; $50=5^2*2$ $75=5^2*3$)

c)

```
citeşte n
      (număr natural nenul)
d←2
repetă
 p←0
 cât timp n%d=0 execută
  p←p+1
  n←[n/d]
 ■
 dacă p%2=0 și p<>0 atunci
  scrie d,' '
 ■
  d←d+1
până când d>n
 scrie n
```

d)

```
var n,d,p:word;
begin
    write('n='); readln(n);
    d:=2;
    while d<=n do
        begin
            p:=0;
            while n mod d =0 do
                begin
                    p:=p+1;
```

```
                                        n:=n div d;
                                    end;
                                if (p mod 2 = 0) and (p<>0) then
                                    write(d,' ')
                                d:=d+1;
                        end;
                write(n);
                readln;
        end.
```

Subiectul II

1. **Răspuns corect:** c. 3 (2,5,7)
2. **Răspuns corect:** d. bcd
3. **Răspuns corect:**

```
if (start.minut=stop.minut) and (start.secunda< stop.secunda) then
write('acceptat')
else if start.minut<stop.minut then  write('acceptat')
else write('respins');
```

4. **Răspuns corect:** 7 şi 9
5.
```
var a:array[1..50,1..50] of integer;
    m,n,i,j:byte;
begin
write('m='); readln(m);
    write('n='); readln(n);
    for i:=1 to m do
      for j:=1 to n do
          begin
                write('a[',i,',',j,']=');
                readln(a[i,j]);
          end;
    for i:=1 to m do
          a[i,n-1]:=a[i,n];
    for j:=1 to n do
          a[m-1,j]:=a[m,j];
    for i:=1 to m-1 do
begin
            for j:=1 to n-1 do
                write(a[i,j],' ');
             writeln;
end;
          readln;
end.
```

Subiectul III

1. **Răspuns corect:** b. 7

f(15)=f(13)-1=7
f(13)=f(11)-1=8
f(11)=f(9)-1=9
f(9)=f(10)+3=10
f(10)=7

2. **Răspuns corect:** (roșu, roz, violet, albastru)
   (roșu, albastru, galben, roz)

3.
```
procedure interval(n:longint; var a,b:longint);
 var p,i:longint;
  begin
     p:=1;
     for i:=2 to n do p:=p*i;
     a:=(p div n) + 1;
     b:=(p * (n+1)) - 1;
  end;
```

4.
```
var f:text;
     x,i,max:longint;
     v:array[10..99] of longint;
begin
     assign(f,'bac.txt');
     reset(f);
            while not eoln(f) do
             begin
                        read(f,x);
                        while x>=10 do
                        begin
                        v[x mod 100]:=v[x mod 100] + 1;
                        x:=x div 10;
                        end;
            end;
     close(f);
     max:=0;
     for i:=10 to 99 do
       if v[i] > max then max:=v[i];
     for i:=10 to 99 do
      if v[i] = max then write(i,' ');
     readln;
end.
```

5. Examen de admitere la Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Sesiunea I, iulie 2014 – varianta B

Din ce în ce mai mulţi elevi, mai ales de la profilul matematică-informatică sunt tentaţi să dea admitere la una din facultățile Universității Tehnice din Cluj-Napoca. Pentru a veni în întâmpinarea lor, vă prezentăm enunțurile și soluțiile examenului de admitere din anul 2014.

Funcția continuă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifică egalitatea $xf(x)=e^x-1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

1 $f(0)$ este: A e B 0 C 1 D -1 E $e-1$

Să se calculeze limitele:

2 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n+2}$ A 2 B 1 C 0 D ∞ E e

3 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\operatorname{arctg}\dfrac{k+1}{n^2}$ A ∞ B 1 C 0 D $\frac{1}{2}$ E $\frac{\pi}{2}$

4 $\lim\limits_{n\to\infty}n^3\left(\sin\dfrac{1}{n+2}-2\sin\dfrac{1}{n+1}+\sin\dfrac{1}{n}\right)$ A 2 B 0 C ∞ D $\sin 1$ E 1

Se dau punctele $A(\lambda,2)$, $B(4,6)$, $C(6,-2)$.

5 Valoarea lui λ pentru care punctele A,B,C sunt coliniare este: A 3 B $\frac{5}{2}$ C 0 D -5 E 5

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$.

6 $f(1)$ este: A $\frac{1}{e}$ B $1-e$ C ∞ D $-\infty$ E $\frac{1}{1-e}$

7 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)$ este: A $-\infty$ B 1 C ∞ D 0 E e

8 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ este: A 0 B ∞ C $-\infty$ D e E 1

9 Ecuația asimptotei oblice a lui f este:
A $y=-x$ B $y=-x+\frac{1}{2}$ C $y=-x+1$ D $y=x+1$ E $y=ex$

Se consideră ecuația $2a\sin^2 x-2\sin x\cos x=a-\sqrt{3}$, $a\in\mathbb{R}$.

10 Mulțimea valorilor lui a pentru care ecuația are soluția $x=0$, este:
A $\{-\sqrt{3}\}$ B $\{\sqrt{3}\}$ C $\{0,\sqrt{3}\}$ D $\emptyset$ E $\{\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$

Se consideră funcțiile $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=mx^2+2(m-1)x+m-1$, $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

11 Soluțiile ecuației $f_1(x)=0$ sunt:
A $x_1=x_2=-1$ B $x_1=1$, $x_2=-1$ C $x_1=0$, $x_2=-1$ D $x_1=x_2=1$ E $x_1=x_2=0$

12 Vârfurile parabolelor asociate funcțiilor f_m se găsesc pe:
A dreapta $y=-x$ B dreapta $y=x$ C parabola $y=x^2$ D dreapta $y=x+1$ E parabola $y=-x^2$

13 $f_m(0)$ este: A $4m-3$ B $1-m$ C $m-1$ D 0 E 1

Dacă $\sin x + \cos x = 1$ atunci $\sin 2x$ este:

14 A 1 B 0 C $\frac{1}{2}$ D $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E -1

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = \frac{[x]}{1+\{x\}}$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x, iar $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x.

15 $f(0)$ este: A 1 B $\frac{1}{2}$ C 2 D $\frac{1}{3}$ E 0

16 Mulțimea soluțiilor ecuației $f(x) = 1$ este: A $[0,1]$ B $\emptyset$ C $\{1\}$ D $(0,1]$ E $[1,2)$

17 Mulțimea soluțiilor ecuației $f(x) = x$ este: A $\{0,1,2\}$ B $\mathbb{N}$ C $\mathbb{Q}$ D $\mathbb{Z}$ E $\{-1,0,1\}$

18 $f(\mathbb{R})$ este: A $(-\infty,-\frac{1}{2}) \cup \{0\} \cup (\frac{1}{2},\infty)$ B $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ C $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ D $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ E $(0,\frac{1}{2}]$

În triunghiul ABC avem $BC = 6$, $m(\widehat{A}) = \frac{\pi}{3}$, $m(\widehat{B}) = \frac{\pi}{4}$.

19 Latura AC are lungimea: A $3\frac{\sqrt{3}}{2}$ B $\sqrt{6}$ C $5\sqrt{6}$ D $2\sqrt{6}$ E $\sqrt{\frac{3}{2}}$

Fie punctele $A(2,1)$, $B(-1,-3)$.

20 Distanța dintre punctele A și B este: A 6 B $\frac{5}{2}$ C 4 D $\frac{3}{2}$ E 5

21 Coordonatele simetricului punctului A față de B sunt: A $(4,7)$ B $(-4,-7)$ C $(-7,-4)$ D $(1,-2)$ E $(7,4)$

Se consideră polinomul $P = X^4 - 4X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$, având rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

22 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ este: A 2 B -4 C 4 D c E $-3 + a + b + c$

23 $P(0)$ este: A a B 0 C $2c$ D c E b

24 Pentru $a = 6$, numărul perechilor $(b,c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, pentru care x_1, x_2, x_3, x_4 sunt întregi, este: A 2 B 1 C 4 D 8 E 16

25 Pentru $c = 1$ perechea $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pentru care rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 sunt reale și pozitive este: A $(-6,4)$ B $(6,4)$ C $(6,-4)$ D $(-6,-4)$ E $(0,0)$

Fie $z = \frac{1}{4}(\sqrt{3} + i)$. Valoarea lui z^{2014} este:

26 A $\frac{1}{2^{2014}}$ B $\frac{1-i\sqrt{3}}{2^{2014}}$ C $\frac{1+i\sqrt{3}}{2^{2014}}$ D $\frac{1-i\sqrt{3}}{2^{2015}}$ E $-\frac{1}{2^{2014}}$

Pe intervalul $(0,\infty)$ se consideră legea de compoziție $x * y = x^{\log_a y}$, unde $a > 0, a \neq 1$ este fixat.

27 $1 * 1$ este: A $\log_a 2$ B 2 C 1 D 2^2 E $\frac{1}{2}$

28 Elementul neutru în raport cu legea " $*$ " este: A $\frac{1}{a}$ B 1 C e D a E $a^{\frac{1}{a}}$

29 Simetricul elementului $x \neq 1$ față de legea " $*$ " este A x^a B $\frac{1}{x}$ C $\log_a x$ D a^x E $a^{\log_x a}$

30 Mulțimea valorilor lui a pentru care intervalul $(0,1)$ este parte stabilă la legea " $*$ " este: A $(1,e)$ B $\emptyset$ C $(1,\infty)$ D $(0,1)$ E $\{e\}$

Se considera matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Notăm cu A^T transpusa matricei A.

31 $\det A$ este: A 1 B -1 C 0 D 2 E -2

32 Perechea $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pentru care $A^2 = aA + bI_2$ este: A $(-2,1)$ B $(2,1)$ C $(2,-1)$ D $(0,0)$ E $(-2,-1)$

33 A^{10} este: A $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$ C $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -20 & 1 \end{pmatrix}$ D $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 20 & -1 \end{pmatrix}$ E $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$

34 Numărul soluțiilor ecuației matriceale $X^4 + X^2 = A^2 + A^T,\ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, este: A 1 B 0 C 2 D ∞ E 4

Fie $f : [0,1] \to [0,1],\ f(x) = xe^{x^2-1}$.

35 $f(0)$ este: A 0 B 1 C e D e^{-1} E $2e$

36 $f(1)$ este: A 0 B 1 C e D e^{-1} E $2e$

37 Aria cuprinsă între graficele funcțiilor f și f^{-1} (inversa lui f) este: A 2 B e C $2e$ D $\frac{1}{e}$ E 1

Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{-3,3\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{6}{x^2-9}$.

38 $f(0)$ este: A $-\frac{2}{3}$ B 1 C 0 D -2 E -3

39 $f'(0)$ este: A -1 B 1 C 0 D $\frac{1}{3}$ E 6

40 Numărul de puncte de extrem local ale lui f este: A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

41 Numărul soluțiilor reale ale ecuației $f'''(x) = 0$ este: A 4 B 0 C 2 D 3 E 1

Să se calculeze:

42 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^2 \frac{x^n}{x^n+1} dx$ A $\ln 2$ B 0 C ∞ D 2 E 1

43 $\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}} \cos \pi x dx$ A 0 B 2 C π D 2π E $-\pi$

44 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ A π B $\frac{\pi}{4}$ C $\frac{\pi}{3}$ D $\frac{\pi}{2}$ E $\frac{\pi}{6}$

45 $\int_0^1 x^2 dx$ A $\frac{1}{3}$ B 2 C $\frac{1}{4}$ D 0 E 3

Soluțiile problemelor:

Prof. Liviu Vlaicu
C.N "Silvania" Zalău

1) Din enunț rezultă că $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$. Deoarece f este continuă, rezultă că $a=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, deci $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=1$**(varianta C)**

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=1$ **(varianta B)**

3) Se poate demonstra fără dificultate că: $x-\frac{1}{3}x^3\leq arctgx\leq x, \forall x\in[0,\infty)$. Pentru $x=\frac{k+1}{n^2}, n\in\mathbb{N}^*, k\in\mathbb{N}$, rezultă: $\frac{k+1}{n^2}-\frac{(k+1)^3}{3n^6}\leq arctg\frac{k+1}{n^2}\leq\frac{k+1}{n^2}$. Însumând după k, obținem: $a_n\leq x_n\leq b_n$, unde $a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{n^2}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)^3}{3n^6}$; $x_n=\sum_{k=0}^{n} arctg\frac{k+1}{n^2}$, $b_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{n^2}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} arctg\frac{k+1}{n^2}=\frac{1}{2}$ (criteriul "Cleștelui). **(varianta D)**

4) Putem scrie: $a_n=n^3\left(sin\frac{1}{n+2}-2sin\frac{1}{n+1}+sin\frac{1}{n}\right)=$

$=\frac{sin\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{(n+2)^3}}\cdot\frac{n^3}{(n+2)^3}-2\frac{sin\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{(n+1)^3}}\cdot\frac{n^3}{(n+1)^3}+\frac{sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}+\frac{n^3}{n+2}-2\frac{n^3}{n+1}+n^2, \forall n\in\mathbb{N}^*$

Deoarece $\lim_{x\to 0}\frac{sinx-x}{x^3}=-\frac{1}{6}$ (regula lui l'Hospital de exemplu), rezultă că $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n+2}-\frac{2n^3}{n+1}+n^2\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{n}{n+2}-\frac{2n}{n+1}+1\right)=$

$=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{n^2+n-2n^2-4n+n^2+3n+2}{(n+1)(n+2)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+1)(n+2)}=2$ **(varianta A)**

5) Punctele $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), P_3(x_3,y_3)$ sunt coliniare $\Leftrightarrow\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}$

$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0$. În cazul nostru, trebuie ca: $\begin{vmatrix}\lambda & 2 & 1\\ 4 & 6 & 1\\ 6 & -2 & 1\end{vmatrix}=0$ rezultă (după efectuarea calculelor) $\lambda=5$ **(varianta E)**

6) $f(1)=\frac{1}{1-e^1}=\frac{1}{1-e}$ **(varianta E)**

7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}=\left[\frac{1}{1-e^{\infty}}\right]=\left[\frac{1}{-\infty}\right]=0$ **(varianta D)**

8) $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}=\left[\frac{1}{1-e^{+0}}\right]=\left[\frac{1}{1-1}\right]=-\infty$ $(e^{\frac{1}{x}}>1, \forall x\in(0,\infty)$, deci $1-e^{\frac{1}{x}}<0)$ **(varianta C)**

9) Avem $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{1-e^t}=-1$

$n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}+x\right)=\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{1-e^{t}}+\frac{1}{t}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t+1-e^{t}}{t(1-e^{t})}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{t}-t-1}{t(e^{t}-1)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{e^{t}-1}\cdot\frac{e^{t}-t-1}{t^{2}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{t}-t-1}{t^{2}}=\frac{1}{2}$

(regula lui l'Hospital). Deci: dreapta de ecuația $y=-x+\frac{1}{2}$ este asimptota oblică a lui f **(varianta B)**

10) pentru $x=0$ rezultă $2asin^{2}0-2sin0cos0=a-\sqrt{3}$ și cum $sin0=0$, obținem $a=\sqrt{3}$ **(varianta B)**

11) Ecuația $f_1(x)=0\Leftrightarrow x^{2}=0\Leftrightarrow x_1=x_2=0$ **(varianta E)**

12) Avem: $x_v=\frac{-b}{2a}=\frac{1-m}{m}$, $y_v=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{4m(m-1)-4(m-1)^{2}}{4m}=\frac{m-1}{m}$. Rezultă $y_v=-x_v$, deci vârfurile parabolelor asociate funcțiilor f_m se găsesc pe drapta $y=-x$ **(varianta A)**

13) $f_n(0)=m\cdot 0^{2}+2(m-1)\cdot 0+m-1=m-1$ **(varianta C)**

14) $sinx+cosx=1\Longrightarrow sin^{2}x+2sinxcosx+cos^{2}x=1\Leftrightarrow 1+sin2x=1\Longrightarrow sin2x=0$ **(varianta B)**

15) $f(0)=\frac{[0]}{1+\{0\}}=\frac{0}{1+0}=0$ **(varianta E)**

16) $f(x)=1\Leftrightarrow[x]=1+\{x\}$. Deoarece $\{x\}\in[0,1)$, rezultă $[x]\in[1,2)$ și cum $[x]\in\mathbb{Z}$ rezultă $[x]=1$ și apoi $\{x\}=0$. În concluzie, $x=1$ **(varianta C)**

17) $f(x)=x\Leftrightarrow\frac{[x]}{1+\{x\}}=x\Leftrightarrow[x]=x+x\{x\}\Leftrightarrow x-\{x\}=x+x\{x\}\Leftrightarrow$ $(1+x)\{x\}=0$, de unde $x\in\mathbb{Z}$ **(varianta D)**

18) Presupunem $x\in[n,n+1),n\in\mathbb{N}^{*}$ și rezultă $f(x)=\frac{n}{1+\{x\}}>\frac{1}{2}$. Dacă $x\in[0,1)\Longrightarrow f(x)=0$. Dacă $n\in\mathbb{Z},n\leq-1$ și $x\in[n,n+1)$, rezultă $f(x)=\frac{n}{1+\{x\}}<-\frac{1}{2}$. Deci $f(\mathbb{R})=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\{0\}\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ **(varianta A)**

19) Din teorema sinusurilor: $\frac{AC}{sin\frac{\pi}{4}}=\frac{6}{sin\frac{\pi}{3}}$ de unde $AC=2\sqrt{6}$ **(varianta D)**

20) $AB=\sqrt{(-1-2)^{2}+(-3-1)^{2}}=\sqrt{9+16}$=5 **(varianta E)**

21) Dacă $A'(\alpha,\beta)$ este simetricul punctului *A* față de punctul *B*, atunci: $-1=\frac{2+\alpha}{2}$ și $-3=\frac{1+\beta}{2}$. Rezultă $\alpha=-4,\beta=-7$ deci $A'(-4,-7)$ **(varianta B)**

22) $x_1+x_2+x_3+x_4=4$ (Viete) **(varianta C)**

23) $P(0)=0^{4}-4\cdot 0^{3}+a\cdot 0^{2}+b\cdot 0+c=c$ **(varianta D)**

24) Avem: $\sum_{i=1}^{4}(x_i-1)^{2}=\sum_{i=1}^{4}{x_i}^{2}-2\sum_{i=1}^{4}x_i+4=\sigma_3{}^{2}-2\sigma_2-\sigma_1+4=$ $4^{2}-2\cdot 6-2\cdot 4+4=0$, deci $x_1=x_2=x_3=x_4=1$. Rezultă $b=-\sigma_3=$ $-C_4^3\cdot 1=-4$ și $c=x_1x_2x_3x_4=1$. Deci $(b,c)=(-4,1)$ **(varianta B)**

25) Dacă $c=1$ și $x_1,x_2,x_3,x_4\in(0,\infty)$, atunci: $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=1=\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}$ Rezultă că $x_1=x_2=x_3=x_4=1$, deci $a=\sigma_2=C_4^2\cdot 1=6$ și $b=-\sigma_3=$ $-C_4^3\cdot 1=-4$. Deci $(a,b)=(6,-4)$ **(varianta C)**

26) $z=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}+i\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{1}{2}\left(cos\frac{\pi}{6}+isin\frac{\pi}{6}\right)$. Rezultă că: $z^{2014}=\frac{1}{2^{2014}}\left(cos\frac{2014\pi}{6}+isin\frac{2014\pi}{6}\right)=\frac{1}{2^{2014}}\left(cos\frac{\pi}{3}-isin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2^{2014}}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1-i\sqrt{3}}{2^{2015}}$ **(varianta D)**

27) $1*1=1^{log_a 1}=1^0=1$ **(varianta C)**

28) Dacă $A=x^{log_a y}$ și $A=y^{log_a x}$, rezultă $log_a A=log_a y^{log_a x}$ și $log_a B=log_a x^{log_a y}$ deci $log_a A=log_a B$. Rezultă că *A=B*, deci legea de compoyiție este comutativă. Dacă $u\in(0,\infty)$este elementul neutru, atunci $x*u=u*x=x, \forall x\in(0,\infty)$. Rezultă $x^{log_a u}=x$, de unde $log_a u=1$ și apoi $u=a$ **(varianta D)**

29) Dacă $x'\in(0,\infty)$ este simetricul elementului *x* față de legea " $*$ ", atunci $x*x^{'}=a$ sau $x^{log_a x'}=a$. Rezultă $log_a x^{'log_a x}=log_a a$ de unde $log_a x^{'}=\frac{1}{log_a x}\Leftrightarrow log_a x^{'}=log_x a$ de unde $x^{'}=a^{log_x a}$ **(varianta E)**

30) Trebuie ca $x^{log_a y}<1, \forall x,y\in(0,1)$. Avem $x^{log_a y}<1\Leftrightarrow x^{log_a y}<x^0\Leftrightarrow log_a y>0\Rightarrow a\in(0,1)$ **(varianta D)**

31) $detA=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1$ **(varianta A)**

32) Avem $TrA=2, detA=1$ deci ecuația Hamilton-Cayley este $A^2-2A+I_2=O_2$ rezultă $a=2, b=-1$ **(varianta C)**

33) Putem scrie: $A=I_2+B$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$. Deoarece matricele I_2 *și* B comută, putem scrie $A^n=(I_2+B)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k I_2^{n-k}B^k=C_n^0 I_2+C_n^1 B$ rezultă $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2n & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2n & 1\end{pmatrix}$, deoarece $B^2=O_2$. Pentru $n=10$, avem $A^{10}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 20 & 1\end{pmatrix}$ **(varianta A)**

34) $A^2+A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ și $det(A^2+A^T)=-4<0$ iar $det(X^4+X^2)=detX^2(X^2+I_2)=(detX^2)\left(det(X^2+I_2)\right)=(detX)^2 det(X^2+I_2)\geq 0$ pentru că $(detX)^2\geq 0$ și $det(X^2+I_2)=det\left(X^2+{I_2}^2\right)\geq 0$, pentru că matricele X, I_2 comută.

(în general, dacă *A*, *B* sunt matrice pătratice de acelaşi ordin, cu elemente reale şi comută, atunci $\det(A^2+B^2)\geq 0$).

Rezultă că ecuația $X^4+X^2=A^2+A^T$ nu are soluții. **(varianta B)**

35) $f(0)=0\cdot e^{0^2-1}=0\cdot e^{-1}=0$ **(varianta A)**

36) $f(1)=1\cdot e^{1^2-1}=1$ **(varianta B)**

37) Din $f^{'}(x)=(1+2x^2)e^{x^2-1}, \forall x\in[0,1]$ rezultă că *f* este strict crescătoare și cum $f([0,1])=[0,1]$ rezultă că *f* este bijectivă. Din $f(x)<x\Rightarrow f(f(x))\leq f(x)\leq x$ deci $f(f(x))\leq x$ rezultă că $f(x)\leq f^{-1}(x), \forall x\in[0,1]$.

Deci $A=aria\Gamma_{f,f^{-1}}=\int_0^1(f^{-1}(x)-f(x))dx=\int_0^1 f^{-1}(x)dx-\int_0^1 f(x)dx=K-L$ unde $K=\int_0^1 f^{-1}(x)dx$ și $L=\int_0^1 f(x)dx$. Pentru calculul lui *K*, notăm: $f^{-1}(x)=t$ rezultă $x=f(t)\Rightarrow dx=f^{'}(t)dt$ și $K=\int_0^1 t\,f^{'}(t)dt=\int_0^1 t(1+2t^2)e^{t^2-1}dt$. Deci $A=\int_0^1\left(x(1+2x^2)e^{x^2-1}-xe^{x^2-1}\right)dx=\int_0^1 2x^3e^{x^2-1}dx=$

$\int_0^1 x^3 e^{x^2-1} dx$. Integrăm prin părți, punând $u = x^2, dv = xe^{x^2-1}$ rezultă $du = 2xdx, v = \frac{1}{2}e^{x^2-1}$ Deci $A = 2\left(\frac{x^2}{2}e^{x^2-1}\Big|_0^1 - \int_0^1 xe^{x^2-1}dx\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{x^2-1}\Big|_0^1\right) =$
$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2e}\right) = \frac{1}{e}$ **(varianta D)**

38) $f(0) = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}$ **(varianta A)**

39) Scriem $f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}$ deci $f'(x) = \frac{-1}{(x-3)^2} + \frac{1}{(x+3)^2}$ de unde $f'(0) = \frac{-1}{9} + \frac{1}{9} = 0$ **(varianta C)**

40) Din $f'(x) = 0 \Longrightarrow (x-3)^2 = (x+3)^2$, de unde $x = 0$.
Deoarece $f'(x) = \frac{-6x}{(x-3)^2(x+3)^2}$, rezultă că $x = 0$ este punct de maxim (local) al lui f **(varianta B)**

41) Avem: $f'(x) = \frac{-1}{(x-3)^2} + \frac{1}{(x+3)^2}, f''(x) = \frac{2}{(x-3)^3} - \frac{2}{(x+3)^3}, f'''(x) = \frac{-6}{(x-3)^4} + \frac{6}{(x+3)^4}$, deci ecuația $f'''(x) = 0$ devine $(x-3)^4 = (x+3)^4$ de unde $x = 0$ **(varianta E)**

42) Fie $A_n = \int_0^2 \frac{x^n}{x^n+1} dx$. Putem scrie: $A_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^n+1} dx + \int_1^2 \frac{x^n}{x^n+1} dx <$
$\int_0^1 \frac{x^n}{x^n+1} dx + \int_1^2 dx \leq \int_0^1 x^n dx + x|_1^2 = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 + 1 = \frac{1}{n+1} + 1$ $(*)$
Mai putem scrie: $A_n > \int_1^2 \frac{x^n}{x^n+1} dx = \int_1^2 \frac{x^n+1-1}{x^n+1} dx = 1 - \int_1^2 \frac{dx}{x^n+1} >$
$> 1 - \int_1^2 \frac{dx}{x^n} = 1 - \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\Big|_1^2 = 1 + \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\Big|_1^2 = 1 + \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} - \frac{1}{n-1}$
$(**)$
Din $(*)$ și $(**)$, rezultă: $1 + \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} - \frac{1}{n-1} < A_n < \frac{1}{n+1} + 1$. Deoarece
$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + 1 = 1$ rezultă că $\lim_{n\to\infty} A_n = 1$ **(varianta E)**

43) Fie $K = \int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}} cos\pi x dx$ și $L = \int_0^2 \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}} cos\pi x dx$. Notăm $2 - x = t$ și rezultă $K = \int_0^2 \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2-t}+\sqrt{t}} cos\pi(2-t)(-dt) = I$. Deoarece $K + L = \int_0^2 cos\pi x dx =$
$= \frac{1}{\pi} sin\pi x\Big|_0^2 = 0$, rezultă $K = 0$ **(varianta A)**

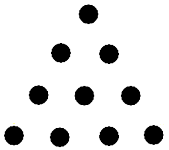
44) Avem $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = arcsin\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} =$
$\arcsin(2x-1)|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = arcsin 0 - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$ **(varianta E)**

45) $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$ **(varianta A)**

Între jocuri şi matematică

prof. Klára Alexuţan
Colegiul Tehnic "Al. Papiu-Ilarian" Zalău

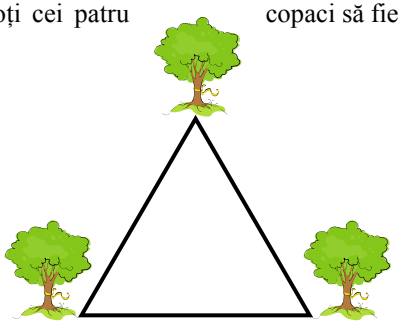
1. Monede în sus și în jos



Schimbați piramida celor zece monede cu susul în jos mutând trei monede.

2. Copaci echidistanți

Cei trei copaci din figură sunt echidistanți, adică fiecare dintre ei se află la o distanță egală față de ceilalți doi. Cum mai poate fi adăugat un al patrulea copac astfel încât toți cei patru copaci să fie echidistanți?

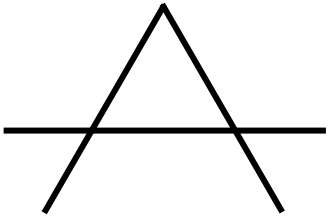


3. Numărul paginilor

Să presupunem că scoți o coală dintr-un ziar, pe care se găsesc paginile 8 și 21. Câte pagini are ziarul?

4. Linii și triunghiuri

Adăugați două linii la cele trei din figură astfel încât să rezulte 10 triunghiuri.



5. Viețile pisicilor

Pisica mamă și-a consumat șapte din cele nouă vieți. Unii dintre puii ei au consumat câte șase vieți, iar alții câte patru. Împreună, pisicii și puilor ei le-au mai rămas 25 de vieți. Câți pisoi sunt?

6. Culegătorii de mere

Dacă cinci culegători de mere culeg cinci mere în cinci secunde, câți culegători vor culege 60 de mere într-un minut.

Bibliografie

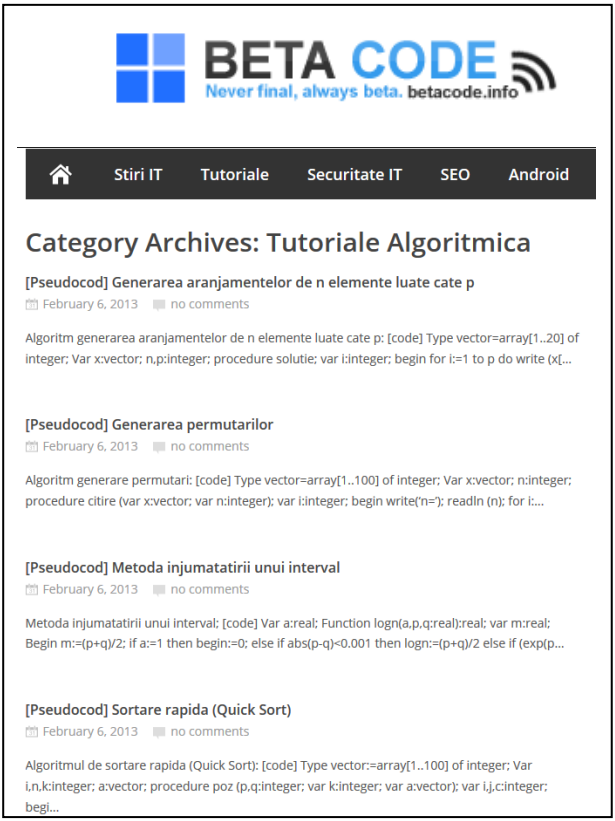
1. **Moscovich, Ivan,** *Marea carte a jocurilor minţii*, volumul I, Editura Litera, Bucureşti, 2009
2. **Moscovich, Ivan,** *Marea carte a jocurilor minţii*, volumul II, Editura Litera, Bucureşti, 2010

Informatica pe Internet

Prof. Ioana Ionescu
C.T. "Al. Papiu Ilarian" Zalău

Pentru a putea reuşi în domeniul informaticii şi mai precis al programării trebuie să ne ajustăm modul în care privim o problemă şi implicit modul ei de abordare. Trebuie să gândim *algoritmic*, să putem împărţi o problemă complexă în mai multe subprobleme cu rezolvări facile şi nu în ultimul rând şi poate ce mai important aspect, trebuie să putem generaliza. De ce spun asta? Algoritmul de rezolvare a unei probleme trebuie să se preteze pentru orice set de valori, pentru orice situaţie particulară.

O colecţie de turoriale şi algoritmi putem găsi în site-ul prezentat în acest număr al revistei, **www.betacode.info.**



Un alt articol interesant cu aplicabilitate tot mai mare în mediul online din ziua de azi este legat de siguranța pe diferite site-uri web - http://www.betacode.info/site-web-sigur/.

Cumpărăturile on-line sunt în crestere și există sute de site-uri care vând aproape totul sub soare! Dar, înainte de a introduce numărul cardului fericit la gândul că vei achiziționa acel obiect/gadget scump, la un preț incredibil, **verificați dacă site-ul este intr-adevar la fel de sigur precum pare a fi**. Dar cum ne dăm seama dacă un site web este sigur? Trebuie să încercăm să înțelegem ce înseamnă un **site web securizat**. Verificarea URL-ului paginii Web este simplă și probabil, una dintre cele mai bune moduri de a detecta dacă un site este sigur sau nu. Doar o privire la URL și veți descoperi că în cazul site-urilor ce sunt sigure, URL-ul începe cu "https" în loc de "http", așa cum se găsește pe paginile Web obișnuite. De exemplu, aruncați o privire la URL-ul de "conectare" de pe pagina de Facebook și veți vedea ca începe cu "https".

Atunci când veți deschide o pagină web ce este sigură, veți găsi o pictogramă a unui sistem de blocare undeva pe fereastra browser-ului. În Microsoft Internet Explorer, ar trebui să vedeți acea pictogramă pe partea dreaptă a barei de adrese (sau bara de locație) a unei pagini web securizate, în timp ce în browser-ul Mozilla Firefox, o veți găsi în colțul din dreapta jos a paginii, pe "bara de stare". Dacă utilizați browser-ul Google Chrome, pictograma ar trebui să apară înainte de URL-ul din bara de adrese.

Încercați să dați cât mai puține informații personale despre voi, chiar deloc dacă este posibil. Acest lucru este aplicabil în special la site-urile mici de cumpărături de pe care nu ați mai achiziționat nimic înainte. În astfel de cazuri, pentru a afla dacă magazinul / comerciantul este real, căutați o adresa fizica sau numărul de contact încercând să vedeți dacă este valabil. De asemenea, faceți unele cercetări despre compania respectivă pe Internet, căutați persoane care au mai cumpărat de acolo și care au oferit feedback.

După cum veți putea vedea dacă citiți articolul în întregime există mai multe metode prin care putem descoperi dacă un site este sau nu sigur.

În concluzie, înainte de a va introduce datele cu caracter personal pe un site verificati mai întâi dacă acesta este sigur.

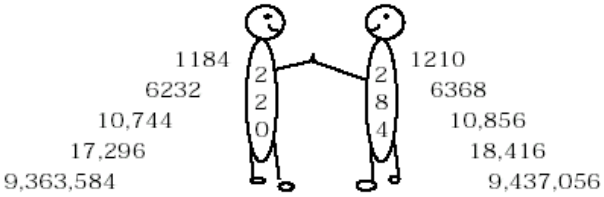
Lecţia de informatică

Despre numere (5)

Prof. Paula – Cristina Deac

Numere prietene

Un prieten este „acela care este alt eu, ca numerele 220 şi 284.”
- Pitagora



Numerele prietene (amiabile) sunt acele perechi de numere în care fiecare este egal cu suma divizorilor proprii ai celuilalt, luând în calcul şi pe 1. De exemplu, 220 şi 284 sunt numere prietene, deoarece divizorii lui 220 sunt 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, iar suma acestora este 284 şi divizorii lui 284 sunt 1, 2, 4, 71, 142, iar suma acestora este 220. Ca într-o relaţie de prietenie, părţile componente ale unuia îl compun pe celalalt. Această pereche a fost descoperită în antichitate de Pitagora.

Cele mai mici seturi de ***numere prietene*** sunt (220, 284), (1184, 1210), (2620, 2924), (5020, 5564), (6232, 6368), iar lista continuă cu peste 4 milioane de perechi de astfel de numere, cele mai mari având 5577 cifre.

Primele perechi de numere amiabile sunt cunoscute încă din antichitate, fiind considerate simbol al prieteniei. Astrologii foloseau aceste numere pentru horoscop şi talismane.

Perechea (17296, 18416) este adesea atribuită lui Fermat, dar se pare că a fost descoperită de Ibn al – Banna în secolul 13 sau 14. Într-adevăr, se regăseşte şi într-o scrisoare adresată de Fermat lui Mersenne în 1636. O altă pereche de numere amiabile, (9363584, 9437056) a fost descoperită de Descartes şi apare în 1638 într-o scrisoare adresată lui Mersenne. Euler a descoperit, de asemenea, 59 de perechi de astfel de numere, printre care perechile (6232, 6368) şi (10744, 10856). La mult timp după Euler, în 1866, un tânăr italian de 16 ani a descoperit o pereche de numere amiabile mai mici, 1184 şi 1210. E. Escott a scris de asemenea un şir de aproximativ 390 de perechi de numere amiabile. Mulţi matematicieni au dedicat o mare parte din timpul lor căutării unor perechi de numere prietene.

Există numeroase metode de generare a unor perechi de numere amiabile, dar niciuna dintre aceste metode nu generează toate perechile, ci doar o parte din ele.

1) *Regula lui Thabit ibn Qurra* (anul 850): dacă n>1 este un număr întreg, iar $p = 3*2^{n-1} - 1$, $q = 3*2^n - 1$, $r = 9*2^{2n-1} - 1$ sunt numere prime, atunci $2^n pq$ şi $2^n r$ sunt numere amiabile. Aplicând această regulă pentru n=1, se obţine perechea lui Pitagora, iar pentru n=3, se obţine perechea lui Fermat.
2) *Regula lui Euler*: dacă n>m>0 sunt numere întregi, iar $p = (2^{n-m}+1)*2^m - 1$, $q = (2^{n-m}+1)*2^n - 1$, $r = (2^{n-m}+1)^2*2^{n+m} - 1$ sunt numere prime, atunci $2^n pq$ şi $2^n r$ sunt numere amiabile. Cazul particular m = n – 1 corespunde teoremei lui Thabit ibn Qurra.

Problemă rezolvată

Fiind date două numere naturale a şi b, să se verifice dacă acestea sunt prietene (amiabile).

Implementare în Pascal

```
Var a, sa, b, sb, d: longint;
Begin
        write('a=');
        readln(a);
        write('b=');
        readln(b);
        sa:=1;
```

```
        for d:=2 to a div 2 do
                if a mod d = 0 then sa:=sa+d;
        if sa=b then
        begin
                sb:=1;
                for d:=2 to b div 2 do
                        if b mod d = 0 then sb:=sb+d;
                if sb=a then writeln (‘Sunt prietene’)
                        else writeln(‘Nu sunt prietene’);
        end
        else writeln(‘Nu sunt prietene’);
        readln;
end.
```

Implementare în C++

```
#include<iostream.h>
int a, sa, b, sb, d;
void main()
{
        cout<<“a=”; cin>>a;
        cout<<“b=”; cin>>b;
        sa=1;
        for(d = 2; d<=a/2; d++)
        if(a%d= =0)
                sa=sa+d;
        if(sa= =b)
        {
                sb=1;
                for(d = 2; d<=b/2; d++)
                        if(b%d==0)
                                sb=sb+d;
                if(sb= =a)
                        cout<<“Prietene”
                else
                cout<<”Nu sunt prietene”;
        }
        else
        cout<<“Nu sunt prietene”;
}
```

Întrebări fără răspuns

Având în vedere că nu se cunoaşte numărul exact al perechilor de numere amiabile şi că teoria numerelor este într-o continuă dezvoltare, voi încheia acest articol cu o serie de întrebări nerezolvate încă:

1) Numărul perechilor de numere amiabile este finit sau infinit?
2) Se cunosc perechi de numere amiabile pare şi perechi de numere amiabile impare, dar sunt oare perechi de astfel de numere de paritate diferită?
3) Există perechi de numere prietene prime între ele?

Probleme propuse

1. Fiind date două numere naturale m şi n, să se verifice dacă ele sunt prietene şi să se afişeze un mesaj corespunzător. Dacă numerele nu sunt prietene, să se afişeze cele mai mici numere naturale mai mari decât n şi m, care sunt prietene.
2. Să se genereze primele n perechi de numere naturale prietene, ştiind că n este un număr natural, 0<n<10.

Bibliografie

1. Clara Ionescu, Adrian Negreanu Maior, Adina Bălan – *Informatică pentru grupele de performanţă*, Editura Dacia Educaţional, Cluj – Napoca, 2004.
2. M. Garcia, J. M. Pedersen, M. J. J. Te Riele – *Modelling, Analysis and Simulation. Amicable pairs, a survey*, Stichting Centrum voor Wiskunde en Informatica, 2003.
3. O. Ore – *Number Theory and Its History*, Dover Publications, New York, 1988.
4. W. Sierpinski – *Elementary Theory of Numbers*, Warszawa, 1964.

Clubul rezolvitorilor de probleme

Prof. Adonia Opriș
Inspectoratul Școlar al Județului Sălaj

Rubrica de faţă îşi propune să vă pregătească pentru *Concursul Naţional de Matematică Aplicată "Adolf Haimovici"* prin iniţierea unui concurs al rezolvitorilor de probleme. În fiecare număr al revistei (semstrial) se vor lansa câte 3 probleme pentru fiecare nivel de studiu. Elevii vor depune, până la finalul lunii ianuarie (pentru primul semestru, respectiv până la finalul lunii mai (pentru semestrul II), la profesorul lor de matematică, soluţiile acelor probleme pe care, bineînţeles le ştiu rezolva, menţionând numele şi prenumele, clasa şi problema (numărul problemei). Fiecare problemă este evaluată cu 7 puncte, clasamentul final şi premiile fiind stabilite la sfârşitul anului şcolar pentru fiecare nivel de studiu în parte.

Urându-vă succes, vă propun pentru semestrul I următoarele probleme:

Clasa a IX-a

I.1 Demonstraţi că $x+y+z \geq \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$, $\forall x,y,z \in \mathbb{R}_+^*$

I.2 Dacă $a=3-\sqrt{2}$ arătaţi că $(6a-a^2) \in \mathbb{Z}$.

I.3 Determinaţi valoarea minimă a expresiei $E=3x-2y$ ştiind că $|2x-3| \leq 4$ şi $|3y+1| \leq 5$, $x,y \in \mathbb{R}$.

Clasa a X-a

I.1 Se consideră expresia $E_k(x)=\left(\sqrt[5]{x}\right)^{26-k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[8]{x}}\right)^k$. Determinaţi $k \in \mathbb{R}$ astfel încât $E_k(x)$să nu conţină pe x.

I.2 Exprimaţi $log_6 12$ în funcţie de $a=log_{18} 24$

I.3 Demonstraţi că $log_a \frac{2ab}{a+b}+log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2$, unde $a,b \in (0,1)$

Clasa a XI-a

I.1 În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, precum şi submulţimea $G = \{X(a) | a \in \mathbb{Q} \text{ şi } X(a) = I_2 + aA\}$.

a) Să se calculeze $X(a) \cdot X(b)$.

b) Să se calculeze $detX(a)$

c) Să se calculeze $X\left(-\frac{2015}{5}\right) \cdot X\left(-\frac{2013}{5}\right) \cdot \ldots \cdot X\left(\frac{1}{5}\right) \cdot X\left(\frac{3}{5}\right) \cdot \ldots \cdot X\left(\frac{2015}{5}\right)$

I.2. Să se calculeze limita şirului $a_n = \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}, n \in \mathbb{N}^*$

I.3. Aflați $a, b \in (0, \infty)$ cu proprietatea $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3n^2 - 2n + a}{an^2 + 1}\right)^{\frac{bn^2+1}{n}} = \frac{1}{e}$

Clasa a XII-a

I.1. Arătaţi că funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \in (-\infty, 0] \\ \frac{x^2}{1+x}, & x \in (0, \infty) \end{cases}$ admite primitive şi determinaţi o primitive a sa.

I.2. Să se calculeze $\int (1 + xf'(x)) \cdot e^{f(x)} dx$ unde f este o funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$

I.3. Să se determine $I = \int \frac{sinx}{sinx + cosx} dx$ şi $J = \int \frac{cosx}{sinx + cosx} dx$ unde funcţiile sunt definite.

Profil

Şortan Luca – Bogdan – clasa a XII-a B (2013 – 2014)

Prof. Paula-Cristina Deac
C. T. "Alesandru Papiu Ilarian" Zalău

Elevul **Şortan Luca – Bogdan**, absolvent al Şcolii Gimnaziale "Horea" din Cizer, a optat la finalul clasei a VIII-a pentru Colegiul Tehnic "Alesandru Papiu Ilarian" Zalău, având o medie care i-ar fi permis intrarea pe un loc fruntaş la orice liceu din Sălaj.

A fost remarcat încă din primele săptămâni de şcoală de către profesorii clasei, fiind unul dintre elevii care făceau faţă cu brio la toate disciplinele.

În cei patru ani de liceu a participat la diferite olimpiade şi concursuri, perseverenţa şi talentul fiindu-i răsplătite cu numeroase premii şi menţiuni:

CLASA a IX-a :

- Locul I naţional şi medalie de aur la etapa judeţeană a concursului evaluare în educaţie la informatică.
- Locul I la olimpiada judeţeană de informatică şi participare la etapa naţională, Piatra Neamţ 2011.

ClASA a X-a:

- Premiul I la etapa judeţeană a olimpiadei "Ştiinţele Pământului" şi participare la etapa naţională
- Locul I la etapa judeţeană a concursului evaluare în educaţie.
- Menţiune la olimpiada judeţeană de informatică

CLASA a XI-a: Menţiune la olimpiada judeţeană de informatică

CLASA a XII-a: Locul II la olimpiada judeţeană de informatică.

A obţinut rezultate bune şi la fizică, limba şi literature română, religie sau concursuri de cultură generală. A reprezentat liceul, în clasa a X-a, la concursul "Cine ştie câştigă", organizat de Radio România Cultural, obţinând locul I. Încununarea succesului de licean a reprezentat-o calitatea de ***"şef de promoţie",*** pe care a meritat-o pe deplin, urmată de admiterea la UTCN, secţia Calculatoare, specializarea Calculatoare şi Tehnologia Informaţiei. Mult succes în continuare, Bogdan!

Munca încununată de succes

Prof. Vasile Sîrb
C.T. "Alesandru Papiu Ilarian" Zalău

Rezultatele deosebite la matematică se obţin prin multă muncă şi sacrificii. Drept dovadă, în acest număr al revistei, prezint doi dintre elevii cu care şcoala noastră se poate mândri.

Elevul **Rus Darius,** clasa a XII-a D, promoţia 2013-2014, profil servicii s-a remarcat încă din clasa a IX-a, obţinând în fiecare an rezultate deosebite la Concursul Naţional de Matematică "Adolf Haimovici" şi la Concursul Interjudeţean de Matematică "Ecomat". În clasa a XII –a s-a calificat pe ţară, în **etapa Finală** a Concursului Naţional "Evaluare în Educaţie" la matematică reuşind să obţină **Locul I şi medalia de aur**. "Am reuşit" mi-a spus elevul bucuros la aflarea veştii că este primul pe ţară, "voi primi şi un laptop drept premiu". Da, munca susţinută i-a adus rezultate. După absolvirea liceului a intrat la Universitatea Tehnică din Cluj Napoca.

Cel de-al doilea elev este **Câmpan Bogdan Dumitru**, promoţia 2013-2014, clasa XII F, profil tehnic În clasa a IX-a a obţinut rezultate bune la concursurile de matematică şi la cele în specialitatea profilului. S-a remarcat prin faptul că a fost un elev serios şi muncitor, la matematică luând nota 10 la Bacalaureat. La concursul Naţioanal de Matematică "Adolf Haimovici" a ocupat în doi ani consecutivi 2103 şi 2014 Locul I pe judeţ, iar la **Etapa Naţională** de la Iaşi a obţinut Menţiune la cele două participări. Acum este student la Universitatea Tehnică din Cluj, profil Telecomunicaţii.

Îi felicit, le urez multă sănătate, putere de muncă în continuare şi să auzim numai de bine.

Viața de liceu

Șortan Bogdan
Clasa 12 B (2013-2014)

Câteva cuvinte despre mine... Am fost elev la Colegiul Tehnic "Alesandru Papiu Ilarian" Zalău pe durata celor patru ani de liceu. În anii aceștia m-am dedicat destul de mult școlii și studiului, reușind astfel să particip la faza națională a olimpiadei de informatică în clasa a 9-a, la Piatra Neamț, precum și un loc 1 la concursul "Evaluare în educație", rezultate pe care le datorez și doamnei profesoare Deac Paula Cristina, căreia îi sunt recunoscător.

În clasa a 10-a am participat la faza națională a olimpiadei naționale "Științele Pământului", la Brăila, cu ajutorul profesorilor mei: Slevaș Bianca, Popa Doina, Banto Mariana și Chiș Lucia, cărora țin la rândul meu să le și mulțumesc.

O altă reușită de care sunt mândru să amintesc e locul 2 județean la olimpiada de informatică în anul școlar terminal 2013-2014. Pe durata celor 4 ani am obtinut și alte locuri sau mențiuni județene, însă toate s-au finalizat cu reușita de a termina ca șef de promoție al generației 2010-2014. În prezent sunt student al Universității Tehnice din Cluj-Napoca, secția Calculatoare, specializarea Calculatoare și Tehnologia Informației. API va rămâne însă mereu în sufletul meu!

Informații utile
Cum se poate publica în revista MI API ?

Revista de Matematică și Informatică MI API se adresează tuturor celor care se simt atrași de matematică și informatică. Este deschisă atât elevilor cât și profesorilor de la Colegiul Tehnic ”Alesandru Papiu Ilarian” Zalău, dar și de la alte școli din județ sau din țară.

Profesorii de matematică, care vor să publice articole, studii, chestiuni de metodică, probleme propuse etc, trebuie să trimită pe adresa redacției materialele redactate în format electronic, respectând următoarele condiții:

- pentru editarea materialelor se va folosi una din versiunile Microsoft Office 2007 sau 2010;
- pagina va fi setată la A5, textul va fi scris cu fontul Times New Roman, dimensiunea acestuia va fi de 11;
- pentru editarea formulelor și a ecuațiilor matematice se va folosi editorul de ecuații implicit;
- figurile geometrice se vor realiza astfel încât acestea să fie lizibile;
- articolele vor fi însoțite de numele autorului / autorilor precum și de școala de proveniență a acestora;
- sursele de informații folosite se vor indica în bibliografie;
- se recomandă ca textele să nu depășească 4 pagini A5;

Elevii, indiferent de școala de proveniență, pot publica articole în revista MI API dacă au recomandarea profesorului de matematică sau informatică de la clasă. Respectarea cerințelor prezentate mai sus sunt obligatorii și pentru aceștia.

Redacția își rezervă dreptul de a selecta materialele trimise spre publicare. De asemenea, responsabilitatea în ce privește conținutul articolelor revine în totalitate autorilor.